

高等数学复习——一元函数积分

傅 林

Part 1. 不定积分

1. 原函数：在区间 I 上，有 $F'(x) = f(x)$ ，则 $F(x)$ 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

*显然，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那么 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的原函数

2. 不定积分：在区间 I 上， $f(x)$ 的原函数全体称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

式中， $f(x)$ 称为被积函数， $f(x)dx$ 称为被积表达式， x 称为积分变量

3. 线性性质：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的原函数都存在，则对任意常数 k_1 和 k_2 ，函数 $k_1f(x) + k_2g(x)$ 的原函数也存在，且

$$\int [k_1f(x) + k_2g(x)] dx = k_1 \int f(x) dx + k_2 \int g(x) dx$$

4. 基本积分表:

$$(1) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(3) \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$$

$$(5) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(7) \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$(9) \int \cot x \csc x dx = -\csc x + C$$

$$(11) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$(2) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$(4) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(6) \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$(8) \int \tan x \sec x dx = \sec x + C$$

$$(10) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

[例题] 求不定积分: (1) $\int \tan^2 x dx$; (2) $\int \frac{(x + \sqrt{x})(x - 2\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$; (3) $\int \frac{x^4}{1 + x^2} dx$

(1) 由于 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, 因此

$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int 1 \cdot dx = \tan x - x + C$$

$$(2) \text{ 原式} = \int \frac{x^3 - 3x^2\sqrt{x} + 4x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x^{\frac{5}{2}} - 3x^2 + 4x \right) dx = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - x^3 + 2x^2 + C$$

$$(3) \text{ 原式} = \int \frac{x^4 + x^2 - x^2}{1 + x^2} dx = \int x^2 dx - \int \frac{x^2}{1 + x^2} dx = \int x^2 dx - \int \frac{1 + x^2 - 1}{1 + x^2} dx \\ = \int x^2 dx - \int 1 \cdot dx + \int \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{1}{3} x^3 - x + \arctan x + C$$

5. 第一类换元法(凑微分法): 设 $f(u)$ 在 I 上有定义, 且存在原函数 $F(u)$; $\varphi(x)$ 在 J 上可导, 且 $\varphi(J) \subseteq I$, 则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$$

6. 第二类换元法(变量代换法): $x = \psi(t)$ 是单调的可导函数, 并且 $\psi'(t) \neq 0$; 又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数, 则

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

*三角换元: 当被积函数具有下面的特征时, 一般考虑用三角换元

➤ $f(x, \sqrt{a^2 - x^2})$, 则令 $x = a \sin t$ 或 $x = a \cos t$

➤ $f(x, \sqrt{a^2 + x^2})$, 则令 $x = a \tan t$ 或 $x = a \cot t$

➤ $f(x, \sqrt{x^2 - a^2})$, 则令 $x = a \sec t$ 或 $x = a \csc t$

[例题] 运用第一类换元法, 求不定积分:

$$(1) \int \tan \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}; \quad (2) \int \cos^3 x dx; \quad (3) \int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}} dx$$

$$(1) \text{ 原式} = \int \tan \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{d(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}} = \int \tan \sqrt{1+x^2} d(\sqrt{1+x^2}) = -\ln |\cos \sqrt{1+x^2}| + C$$

$$(2) \text{ 原式} = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 原式} &= \int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} dx - \int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}} d\left(\frac{2}{3}x\right) + \int \frac{1}{8\sqrt{9-4x^2}} d(9-4x^2) \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + \frac{1}{4} \sqrt{9-4x^2} + C \end{aligned}$$

[例题] 运用第二类换元法, 求不定积分: (1) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$; (2) $\int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2-1}} dx$

$$\begin{aligned} (1) \text{ 令 } x = \sin t, \text{ 则 } dx &= \cos t dt, \text{ 原式 } = \int \frac{\sin^5 t}{\cos t} \cdot \cos t dt = \int \sin^5 t dt = \int \sin^4 t \sin t dt \\ &= - \int (1 - \cos^2 t)^2 d(\cos t) = - \int (1 - 2\cos^2 t + \cos^4 t) d(\cos t) \\ &= - \left[\cos t - \frac{2}{3} \cos^3 t + \frac{1}{5} \cos^5 t \right] + C = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} (1-x^2)^{\frac{5}{2}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 令 } x = \sec t, \text{ 则 } dx &= \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt, \text{ 原式 } = \int \cos^4 t \cdot \frac{\cos t}{\sin t} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = \int \cos^3 t dt \\ &= \int (1 - \sin^2 t) d(\sin t) = \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{x^3} + C \end{aligned}$$

7. 倒代换($x = \frac{1}{t}$): 当被积函数是**分母次数较高**的有理函数或根式有理式时, 使用倒代换也许可以使分母次数变得略低

[例题] 求不定积分 $\int \frac{dx}{x^{100} + x}$

$$\begin{aligned}\text{解: 令 } x = \frac{1}{t}, \text{ 则 } dx &= -\frac{1}{t^2} dt, \text{ 原式} = \int \frac{1}{\frac{1}{t^{100}} + \frac{1}{t}} \cdot -\frac{1}{t^2} dt = -\int \frac{t^{98}}{t^{99} + 1} dt \\ &= -\frac{1}{99} \int \frac{1}{t^{99} + 1} d(t^{99} + 1) = -\frac{1}{99} \ln |t^{99} + 1| + C = -\frac{1}{99} \ln \left| \frac{1}{x^{99}} + 1 \right| + C\end{aligned}$$

8. 分部积分法: $\int u dv = uv - \int v du$

*要保证 $\int v du$ 比 $\int u dv$ 更容易积出!

“反对幂指三”

[例题] 用分部积分法求不定积分: (1) $\int x^2 \ln x dx$; (2) $\int e^x \sin x dx$

$$(1) \text{ 原式} = \frac{1}{3} \int \ln x d(x^3) = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$$

$$(2) \text{ 原式} = - \int e^x d(\cos x) = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + \int e^x d(\sin x) \\ = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$\text{因此有 } \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

9. 有理函数的积分：两个多项式的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为有理函数，当 $P(x)$ 的次数低于 $Q(x)$ 时，称为真分式，否则为假分式。

事实上，利用多项式的除法，总可以将一个假分式化为一个多项式与一个真分式之和，因此接下来我们主要讨论真分式的积分法。

➤ 计算积分 $\int \frac{1}{2x+1} dx$

最简单，分子为1，分母为一次

解：原式 $= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2x+1} d(2x+1) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$

➤ 计算积分 $\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx$

分子为1，分母二次可分解

解：原式 $= \int \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \ln|x-2| - \ln|x-1| + C$

➤ 计算积分 $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 4} dx$

分母二次不可分，但配方后+常数

$$\text{解：原式} = \int \frac{1}{(x-1)^2 + 3} d(x-1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} d\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

➤ 计算积分 $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx$

分母二次不可分，分子一次

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} dx - \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} - \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} d(x+1) \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) - \arctan(x+1) + C \end{aligned}$$

➤ 计算积分 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} dx$

分母高次可分解

解：设 $\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$ ，通分后有

$$\frac{(A+2B)x^2 + (B+2C)x + (A+C)}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}$$

因此 $A+2B=0$ ， $B+2C=0$ ， $A+C=1$ ，解得 $A=\frac{4}{5}$ ， $B=-\frac{2}{5}$ ， $C=\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{\frac{4}{5}}{1+2x} dx + \int \frac{-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}}{1+x^2} dx = \frac{2}{5} \int \frac{1}{1+2x} d(1+2x) - \frac{1}{5} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{5} \ln \frac{(1+2x)^2}{1+x^2} + \frac{1}{5} \arctan x + C \end{aligned}$$

➤ 计算积分 $\int \frac{x^2 + 1}{(x + 2)(x + 1)^2} dx$

解：设 $\frac{x^2 + 1}{(x + 2)(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$ ，通分后有

$$\frac{(A + B)x^2 + (2A + 3B + C)x + A + 2B + 2C}{(x + 2)(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 1}{(x + 2)(x + 1)^2}$$

解得 $A = 5$ ， $B = -4$ ， $C = 2$

$$\text{因此原式} = \int \left(\frac{5}{x + 2} - \frac{4}{x + 1} + \frac{2}{(x + 1)^2} \right) dx = 5 \ln|x + 2| - 4 \ln|x + 1| - \frac{2}{x + 1} + C$$

10. 可化为有理函数积分：通过变量替换，我们可以把一些复杂的积分变为简单的有理函数积分. 一般来说，如果被积函数中含有简单根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ，可以令这个简单根式为 u ，这样可化为有理函数积分.

[例题] 求不定积分：(1) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$ ；(2) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$

(1) 设 $u = \sqrt[3]{x+2}$ ，则 $x = u^3 - 2, dx = 3u^2 du$ ，因此原积分可化为

$$\begin{aligned} \int \frac{3u^2}{1+u} du &= 3 \left[\int (u-1) du + \int \frac{1}{1+u} du \right] = 3 \left[\frac{u^2}{2} - u + \ln|1+u| \right] + C \\ &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+2)^2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 3\ln|1+\sqrt[3]{x+2}| + C \end{aligned}$$

(2) 设 $u = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$, 则 $x = \frac{1}{u^2-1}$, $dx = -\frac{2u}{(u^2-1)^2} du$, 因此原积分可化为

$$\begin{aligned} \int (u^2-1) \cdot u \cdot -\frac{2u}{(u^2-1)^2} du &= -2 \int \frac{u^2}{u^2-1} du = -2 \left[\int 1 du + \int \frac{1}{u^2-1} du \right] \\ &= -2 \left[u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right] + C = -2u - \ln \left| \frac{u^2-1}{(u+1)^2} \right| + C = -2u - \ln |u^2-1| + 2 \ln |u+1| + C \\ &= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} + \ln |x| + 2 \ln \left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 1 \right) + C \end{aligned}$$

Part 2. 定积分

1. 定积分的定义：设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，在 $[a, b]$ 中插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

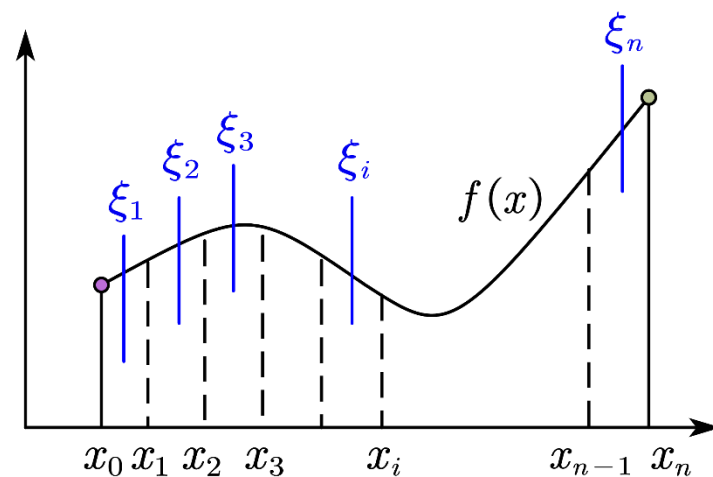
各个小区间的长度

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

在每个小区间上任取一点 ξ_i ，并且记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$ ，则

一般取区间端点

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$



2. 利用定积分的定义求极限：所求的极限式是无穷项的求和，并且化简难度较大时，可以考虑用定积分求极限

[例题] 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1^2} + \frac{2}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$

$$\text{解：原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{2}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{n}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{\frac{1}{n}}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{\frac{2}{n}}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{\frac{n}{n}}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right]$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

3. 定积分的性质:

➤ 线性性质: $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$

➤ 区间拆分: 若 $a < c < b$, 则 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

➤ 保不等式: 若 $[a, b]$ 上恒有 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

➤ 绝对值放缩: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

➤ 最值限定: 设 M 和 m 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大、小值, 则 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

➤ 定积分中值定理: 若 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$, s.t. $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$

4. 积分上限函数：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则积分上限函数为 $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$

➤ $\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，且 $\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$

➤ $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数

5. 牛顿-莱布尼茨公式(微积分基本公式)：如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

这个公式将是我们求解定积分的最常用的方法！

6. 定积分的换元法：假设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，函数 $x = \varphi(t)$ 满足条件：

(1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ (或 $[\beta, \alpha]$) 上具有连续导数且值域为 $[a, b]$

则有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

*定积分中换元法的重点，是新的上下限的计算！

[例题] 计算积分 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$

解：令 $x = a \sin t$ ，则 $x = 0$ 时， $t = 0$ ； $x = a$ 时， $t = \frac{\pi}{2}$

$$\text{因此原式} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot a \cos t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \cdot \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

有时也可以不用明显地写出新变量，这样定积分的上下限也不需要变更.

[例题] 计算积分 $\int_0^{\sqrt{2}a} \frac{x dx}{\sqrt{3a^2 - x^2}}$

解：原式 $= -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{1}{\sqrt{3a^2 - x^2}} d(3a^2 - x^2) = -\sqrt{3a^2 - x^2} \Big|_0^{\sqrt{2}a} = (\sqrt{3} - 1)a$

7. 定积分的分部积分法：类似不定积分的分部积分，我们有

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

[例题] 计算积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$

解：原式 $= x \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

8. 重要结论:

➤ 若 $f(x)$ 为连续的偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

➤ 若 $f(x)$ 为连续的奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

➤ 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则 $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$

即在长度为一个周期的区间上的定积分, 与该区间的起点位置无关!

➤ Wallis公式:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于1的奇数} \end{cases}$$

[例题] 计算积分: (1) $\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$; (2) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$

(1) 被积函数是偶函数, 因此原式 $= 2 \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

$$\text{令 } x = \sin t, \text{ 则原式 } = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt \right]$$

$$\xrightarrow{\text{Wallis公式}} 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{8}$$

(2) 利用被积函数的周期性和奇偶性, 我们有

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx = 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx \right]$$

对蓝色部分, 作变量替换 $x = \pi - t$, 则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{1 + \cos^2 t} \cdot -dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos^2 t} dt$

$$\begin{aligned} \text{因此原式} &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{1 + \sec^2 x} dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + \tan^2 x} d(\tan x) \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot d\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) = \left[2\sqrt{2} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \pi \end{aligned}$$

9. 反常积分：当积分区间无穷区间，或者被积函数为无界函数时，这种特殊的定积分被称为反常积分。主要的计算工具依然是牛顿-莱布尼茨公式

[例题] 计算积分：(1) $\int_0^{+\infty} te^{-pt} dt$ ($p > 0$) ; (2) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}}$

$$\begin{aligned} (1) \text{ 原式} &= -\frac{1}{p} \int_0^{+\infty} t d(e^{-pt}) = -\frac{1}{p} \left[te^{-pt} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \right] = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \\ &= -\frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

(2) 作变量代换 $x = \frac{1}{t}$, 则原式

$$= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} + 1 \right)^3}} \cdot -\frac{1}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^{3/2}} dt = -2 \frac{1}{\sqrt{t+1}} \Big|_0^{+\infty} = 2$$