数学物理方法——复积分专题

傅 林

目录

一、Cauchy定理

1. 单连通区域：若函数$f(z)$在闭单连通区域$\bar{B}$上解析，则沿$\bar{B}$上任一分段光滑的闭合曲线l（可以是边界），有

$$\oint_l f(z)dz = 0$$

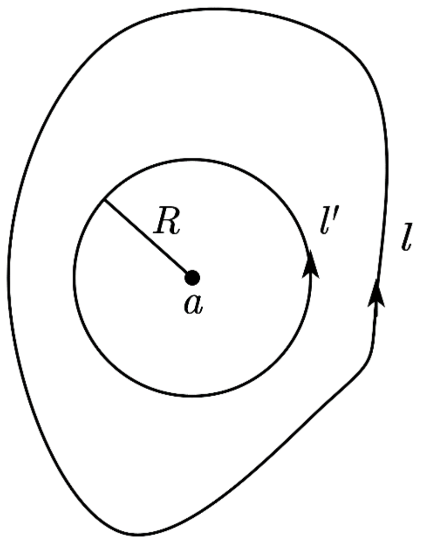
2. 复连通区域：若 $L = l + \sum_{k=1}^{n} l_k$ 为复连通区域的全部边界线，则

$$\oint_l f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{l_k} f(z)dz = 0$$

式中的积分均沿边界线的正方向进行.

3. 一个重要积分：$I=\oint_l (z-a)^n dz$ （n为整数）

解析：当l不包围点a时，显然有$I=0$；当l包围点a，且$n \geq 0$时，也有$I=0$. 因此下面我们讨论l包围点a且$n<0$的情形.



在l的内部，以a为圆心，R为半径，作圆周l'；在l'上，$z-a=Re^{i\varphi}$

$$\oint_{l'} (z-a)^n dz=\int_0^{2\pi} R^n e^{in\varphi}\cdot Rie^{i\varphi}d\varphi=R^{n+1}i\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi}d\varphi$$

当$n=-1$时，$\oint_{l'} (z-a)^n dz=2\pi i$

当$n\neq -1$时，$\oint_{l'} (z-a)^n dz=\frac{R^{n+1}}{n+1}e^{i(n+1)\varphi}\Big|_0^{2\pi}=0$

再利用复连通区域Cauchy定理，我们有 $\oint_{l}(z-a)^{n}dz=\oint_{l'}(z-a)^{n}dz$

*由本题引出的重要结论：

当l包围点a，且$n=-1$时，我们有 $\oint_{l}\frac{1}{z-a}dz=2\pi i$

因此 $$\frac{1}{2\pi i}\oint_{l}\frac{1}{z-a}dz=\begin{cases}0 & (l\text{不包围}a)\\ 1 & (l\text{包围}a)\end{cases}$$

上式是一个非常有用的结论，利用它可以推导出Cauchy公式和留数定理.

二、Cauchy积分公式及其推论

1. Cauchy积分公式：若$f(z)$在闭单连通域$\bar{B}$上解析，l为边界线，a为区域内的任意一点，则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{z-a}dz$$

2. 导数公式：对Cauchy积分公式左右两边进行多次求导，可得

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

3. Cauchy不等式：$f(z)$在区域B内解析，a为B内一点，以a为圆心作圆周$C: |z-a|=R$，C及其内部均含于B；若$\forall z\in C$，有$|f(z)|\le M$, 则

$$|f^{(n)}(a)|\leqslant\frac{n!M}{R^n}$$

证明：运用导数公式 $\left|f^{(n)}(a)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R=\frac{n!M}{R^n}$

4. 刘维尔定理：如果$f(z)$在全平面上解析，并且是有界的，即$\exists N$，$s.t.\,|f(z)|\leq N$，则$f(z)$必为常数.

证明：在全平面上任选一点a，以其为圆心作圆$C:|z-a|=R$，由于$\forall z\in C$，有$|f(z)|\leq N$

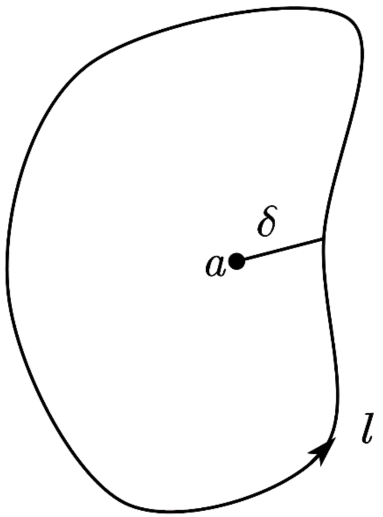
因此由Cauchy不等式 $\left|f^{(n)}(a)\right|\leqslant \frac{n!N}{R^n}$

令上式中$n=1$，即得 $|f'(z)|\leqslant \frac{N}{R}$

由于$f(z)$在全平面解析，故可令$R\to\infty$，便有$|f'(z)|\to 0$，因此$f(z)$为一常数.

5. 模数原理：设$f(z)$在某个闭区域上解析，则$|f(z)|$只能在边界线l上取极大值.

证明：由于$f(z)$解析，故$[f(z)]^n$也解析，对区域内任一点a，由Cauchy积分公式由有



$$[f(a)]^n = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{[f(z)]^n}{z-a}dz$$

设$|f(z)|$在边界上的极大值为M，l上$|z-a|$的极小值为δ，l的周长为s

$$|f(a)|^n \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M^n}{\delta}\cdot s \quad \text{即} \quad |f(a)| \leqslant M\left(\frac{s}{2\pi\delta}\right)^{\frac{1}{n}}$$

令$n \to \infty$，便得到 $|f(a)| \leqslant M$

6. 代数学基本定理：复平面上的n次多项式$p(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n(a_0\neq 0)$至少有一个零点.

证明：设$p(z)$在复平面上无零点. 由于$p(z)$在复平面上解析，故$\frac{1}{p(z)}$在复平面上也解析.

又 $\lim\limits_{z\to\infty} p(z)=\lim\limits_{z\to\infty} z^n\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}\right)=\infty$ ，因此 $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{p(z)}=0$

由极限的定义，存在充分大的正数R，当$|z|>R$时，$\left|\frac{1}{p(z)}\right|<1$

又$\frac{1}{p(z)}$在闭圆$|z|\leq R$上连续，设$\frac{1}{p(z)}$在边界$|z|=R$上的最值为M，则当$|z|\leq R$时，$\left|\frac{1}{p(z)}\right|\leqslant M$

从而，在复平面上，有$\left|\frac{1}{p(z)}\right|<M+1$. 由刘维尔定理，$\frac{1}{p(z)}$必为常数，即$p(z)$必为常数.

与$p(z)$是n次多项式矛盾. 故$p(z)$在复平面上必存在零点，证毕.

三、留数定理

1. 由Cauchy定理，可知解析点对回路积分的值没有贡献.

由 $\oint_l \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i$ (l包围点a)，可知函数在奇点处作幂级数展开后-1次方项对积分值有贡献.

2. 奇点的分类:①可去奇点：$f(z)$在z_0邻域上的Laurent展开为

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

则z_0叫做$f(z)$的可去奇点，此时显然有 $\lim_{z\to z_0} f(z) = a_0$，可通过重定义将其消除.

②极点：$f(z)$在z_0邻域的Laurent展开为

$$f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-b) + \cdots$$

则z_0叫做$f(z)$的m阶极点

*等价定义：$f(z)$在z_0某去心邻域内能表成 $f(z) = \frac{\lambda(z)}{(z-z_0)^m}$，且$\lambda(z_0) \neq 0$

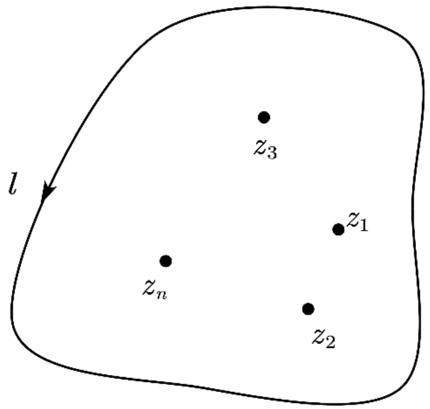
③本性奇点：$f(z)$在z_0邻域内的Laurent展开有无限多个负次幂项，则z_0叫做$f(z)$的本性奇点.

3. 留数：由于Laurent级数中$(z-z_0)^{-1}$的系数a_{-1}具有特殊的地位，特地称其为$f(z)$在z_0点的留数，记作$\mathrm{Res}f(z_0)$

4. 留数定理：设$f(z)$在回路l所包围的区域上除有限个孤立奇点$z_1,z_2,\dots,z_n$外解析，则

$$\oint_l f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}f(z_k)$$

5. 无穷远点的留数：取一个足够大的回路l包围有限远处所有的奇点，则由留数定理有



$$\oint_l f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}f(z_k)$$

定义$\oint_l f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}f(\infty)$，则有$\mathrm{Res}f(\infty)+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}f(z_k)=0$

*直接计算无穷远点留数的一种方法：$|z| \to \infty$时，若$f(z) \to \left(\cdots + b_1 z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \cdots\right)$

则此时直接有$\text{Res} f(\infty) = b_1$

例如，令$f(z) = \frac{z^3(1-3z)}{(2+z)(1+2z^4)}$，当$|z| \to \infty$，$f(z) \to \frac{z^3 \cdot (-3z)}{z \cdot 2z^4} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z}$，故$\text{Res} f(\infty) = -\frac{3}{2}$

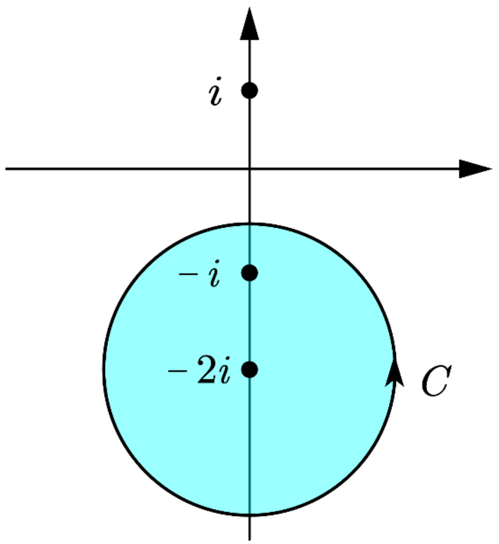
6. 极点留数的计算：若z_0是$f(z)$的n阶极点，则$\text{Res} f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$

$n = 1$时，z_0是单极点，设$f(z)$可以表成$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$，$z_0$是$\psi(z)$的单根，$\varphi(z_0) \neq 0$

则$\text{Res} f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$

➢ 类型一：可直接用留数定理计算

例1：计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}dz$ ，其中$C:|z+2i|=\frac{3}{2}$，逆时针方向.



解析：令$z^2+1=0$，解得$z=i$或$-i$，在C所包围的区域内，被积函数的奇点只有$z_0=-i$

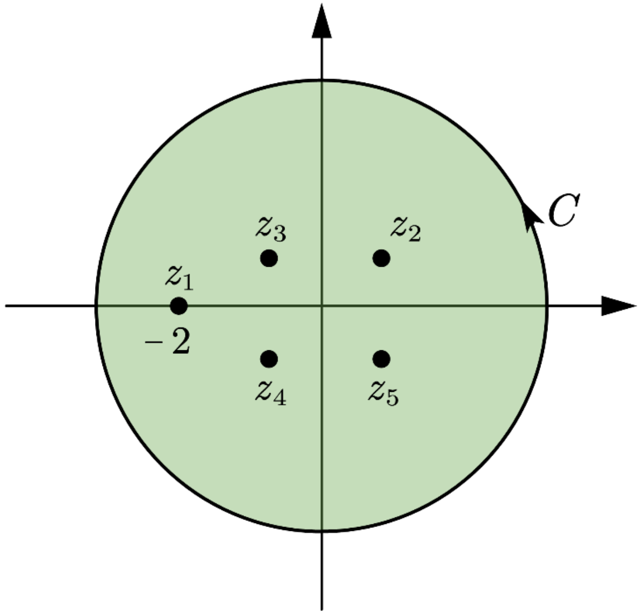
又因为$z_0=-i$是单极点，因此

$$\operatorname{Res} f(-i)=\left.\frac{e^z}{(z^2+1)'}\right|_{z=-i}=\frac{e^{-i}}{-2i}=\frac{\cos 1-i\sin 1}{-2i}$$

由留数定理，原式$=2\pi i\cdot\operatorname{Res} f(-i)=-\pi(\cos 1-i\sin 1)$

➢ 类型二：回路包围奇点较多，用无穷远点的留数计算

例2：计算积分 $\oint_C \dfrac{z^3(1-3z)}{(2+z)(1+2z^4)}dz$，其中$C$: $|z|=3$，逆时针方向.



解析：令$(2+z)(1+2z^4)=0$，得被积函数在C包围区域内的奇点有

$$z_1=-2,z_2=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}},z_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{3\pi}{4}},z_4=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{5\pi}{4}},z_5=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

此时奇点个数较多，逐个计算留数会非常麻烦，因此我们考虑计算无穷远点的留数

当$|z|\to\infty$时，$f(z)\to\dfrac{z^3\cdot(-3z)}{z\cdot 2z^4}=-\dfrac{3}{2z}$，因此$\mathrm{Res}\,f(\infty)=-\dfrac{3}{2}$

因此原式 $=2\pi i\sum_{k=1}^{5}\mathrm{Res}\,f(z_k)=2\pi i\cdot-\mathrm{Res}\,f(\infty)=3\pi i$

➢ 类型三：有理三角函数积分

积分 $I=\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$，其中$R$是$\sin\theta$, $\cos\theta$的有理函数，且R在$[0,2\pi]$上是连续的

作变换$z=e^{i\theta}$，则 $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}$，$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$，$d\theta=\frac{dz}{iz}$

则原积分变为 $I=\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2iz},\frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{dz}{iz}=2\pi i\cdot\sum_{|z|<1}\mathrm{Res}\left\{\frac{1}{iz}R\left(\frac{z^2-1}{2iz},\frac{z^2+1}{2z}\right)\right\}$

例3：计算积分 $I=\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}d\theta$，$|\varepsilon|<1$

解析：被积函数 $\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}$ 是关于θ的偶函数，因此 $\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}d\theta$

按照上面的步骤，我们有 $I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{1}{1+\varepsilon\cdot\frac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}dz$

令 $\varepsilon z^2+2z+\varepsilon=0$，解得 $z_1=\dfrac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}, z_2=\dfrac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$

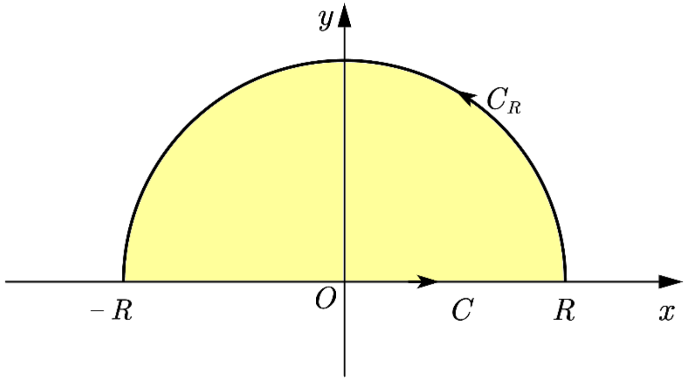
由于$z_1z_2=1$，因此必定只有一个奇点z_1位于单位圆内；又z_1是被积函数的单极点

因此$\mathrm{Res}f(z_1)=\left.\dfrac{1}{(\varepsilon z^2+2z+\varepsilon)'}\right|_{z=\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

由留数定理，$I=\dfrac{1}{i}\cdot 2\pi i\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\dfrac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

➢ 类型四：实函数的无穷积分

对于积分$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$，将定义域延拓到复平面成为复函数$f(z)$；然后寻找合适的积分路径，形成复平面的闭合围道；一般来说，我们选取如图所示的半圆形积分回路



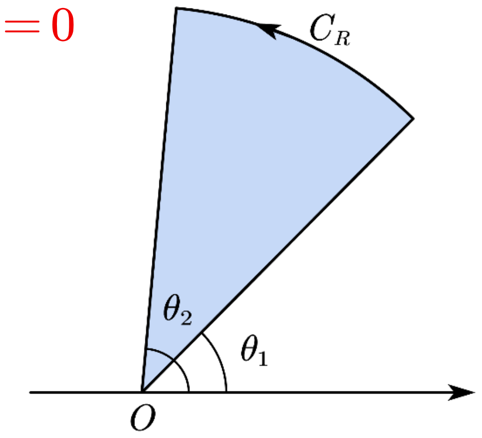
则 $I'=\oint_{C+C_R} f(z)dz=\int_{-R}^{R} f(z)dz+\int_{C_R} f(z)dz$

$=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}f(z_k)$

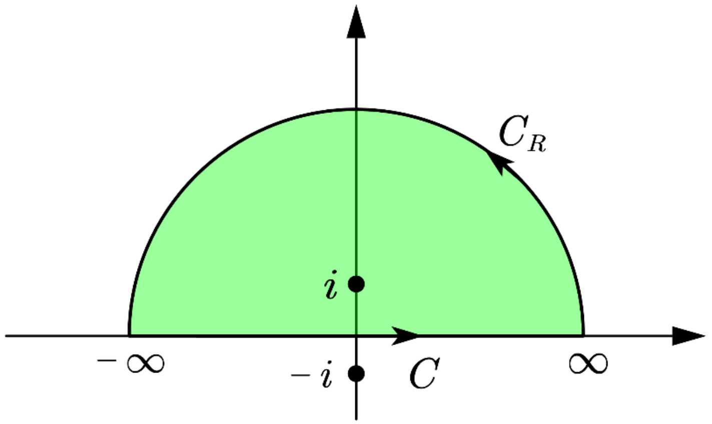
如果$|z|\to\infty$时，$z\cdot f(z)\to 0$，则有$\int_{C_R} f(z)dz=0$

*大圆弧引理：$f(z)$在∞点的邻域内连续，在$\theta_1\le \arg z\le\theta_2$中，当$z\to\infty$时，$zf(z)$一致地趋近于$K$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=iK(\theta_2-\theta_1)$$



例4：计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}$



解析：原式 $=\int_C \frac{dz}{(1+z^2)^3}$ ，取半圆C_R与C组成闭合回路

令$(1+z^2)^3=0$，解得$z=\pm i$，位于回路包围区域内的奇点只有$z_0=i$一个

又因为$z_0=i$是被积函数的三阶极点，因此 $\mathrm{Res}f(i)=\lim\limits_{z\to i}\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{dz^2}[(z-i)^3f(z)]=\frac{3}{16i}$

且$|z|\to\infty$时，$zf(z)=\frac{z}{(1+z^2)^3}\to 0$，因此$\int_{C_R}f(z)dz=0$

由留数定理，$\oint_{C+C_R}\frac{dz}{(1+z^2)^3}=\int_C\frac{dz}{(1+z^2)^3}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}=2\pi i\cdot\mathrm{Res}f(i)=\frac{3\pi}{8}$

➢ 类型五：含三角函数的无穷积分

该类型处理的积分是$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos px dx$ 或 $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin px dx$

此时依然可以采用类型四中的半圆形围道去处理该类积分，但被积函数一般不取$f(x)\cos px$或$f(x)\sin px$，因为$z=\infty$是$\cos pz,\sin pz$的本性奇点

为了解决这一问题，我们可以将被积函数取为$f(z)e^{ipz}$，那么由欧拉公式有：

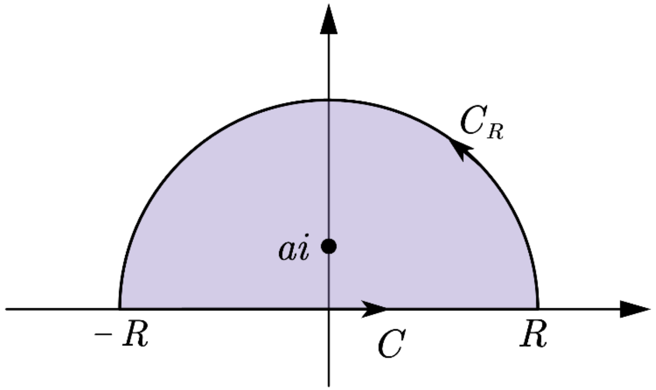
$$\oint_{C+C_R} f(z)e^{ipz}dz=\int_{-R}^{R} f(x)\left(\cos px+i\sin px\right)dx+\int_{C_R} f(z)e^{ipz}dz$$

这样一来，只需要计算出$\int_{C_R} f(z)e^{ipz}dz$，再比较实部和虚部，就可以求得 $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos pxdx$ 和 $I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin pxdx$

那么，在什么条件下，$\int_{C_R} f(z)e^{ipz}dz = 0$ 呢？

*Jordan引理：在$0 \le \arg z \le \pi$范围内，当$|z| \to \infty$时，$f(z)$一致地趋于0，则$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{ipz}dz = 0$

例5：计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx$，$a>0$



解析：考虑积分$\oint_{C+C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}dz$，令$z^2+a^2=0$，则在积分回路包围的区域内，，被积函数的奇点只有$z=ai$.

$$\mathrm{Res}f(ai) = \left.\frac{ze^{iz}}{(z^2+a^2)'}\right|_{z=ai} = \frac{1}{2}e^{-a}$$

又由Jordan引理，有$\int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}dz = 0$

则由留数定理，$$\oint_{C+C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}dz = \int_C \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2}e^{-a} = i\pi e^{-a}$$

实虚部相对应，便得$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx=\pi e^{-a}$，因此$\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\pi e^{-a}$

思考：在前面我们提到，$z=\infty$是$\cos pz,\sin pz$的本性奇点，但这是否意味着$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\sin pz dz$或$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\cos pz dz$一定不存在呢？

*补充引理：设$f(z)$只有有限个奇点，且在下半平面的范围内，当$|z|\to\infty$时$f(z)$一致地趋于0，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)e^{-ipz}dz=2\pi i\cdot\sum_{\text{全平面}}\mathrm{Res}\{f(z)e^{-ipz}\}=-2\pi i\cdot\mathrm{Res}\{f(z)e^{-ipz}\}_{z=\infty}$$

可利用该补充引理，重新求解例5

根据留数定理，有 $\oint_{C+C_R} \frac{z\sin z}{z^2+a^2}dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\frac{z\sin z}{z^2+a^2}\bigg|_{z=ai} = \frac{\pi}{2}(e^{-a}-e^{a})$

由Jordan引理，有 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}dz = 0$

由补充引理，有 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{ze^{-iz}}{z^2+a^2}dz = 2\pi i \cdot \sum\limits_{\text{全平面}} \mathrm{Res}\frac{ze^{-iz}}{z^2+a^2} = \pi i(e^{a}+e^{-a})$

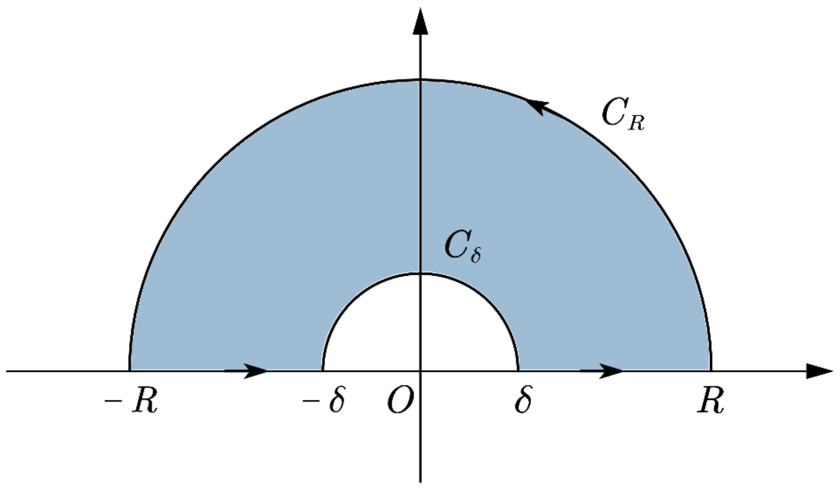
因此，$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{z\sin z}{z^2+a^2}dz = \lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{z}{z^2+a^2}\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}dz = \frac{1}{2i}\left[\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}dz - \lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{ze^{-iz}}{z^2+a^2}dz\right]$

$= -\frac{\pi}{2}(e^{a}+e^{-a})$

这样一来，便直接得到 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx = \pi e^{-a}$，因此 $\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\pi e^{-a}$

➤ 类型六：积分路径上有奇点的情形

例6：计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(1+x+x^2)}$



解析：考虑复积分 $\oint \frac{dz}{z(1+z+z^2)}$，令 $z(1+z+z^2)=0$

解得 $z_1=0, z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

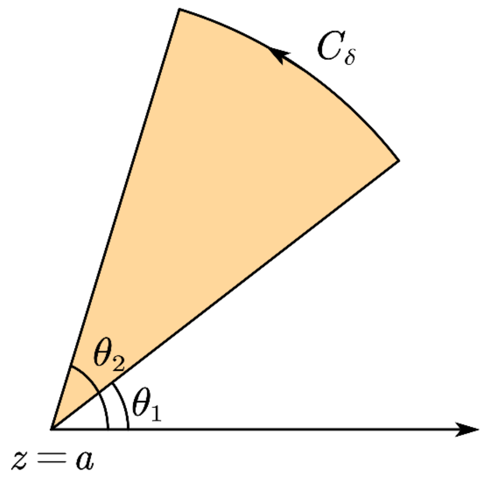
此时若依然采用之前的半圆形围道，那么积分路径上将出现奇点 $z_1=0$

因此，考虑如图所示的扇环形围道，由留数定理：$\oint \frac{dz}{z(1+z+z^2)} = \int_{-R}^{-\delta} \frac{dx}{x(1+x+x^2)}$

$+\int_{C_\delta} \frac{dz}{z(1+z+z^2)} + \int_{\delta}^{R} \frac{dx}{x(1+x+x^2)} + \int_{C_R} \frac{dz}{z(1+z+z^2)}$

$$=2\pi i\cdot\operatorname{Res}\frac{1}{z(1+z+z^2)}\bigg|_{z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}-i\pi$$

由大圆弧引理，可得 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{z(1+z+z^2)}=0$



*小圆弧引理：$f(z)$在$z=a$的空心邻域内连续，并且在$\theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$范围内，当$|z-a|\to 0$时，$(z-a)f(z)$一致地趋近于$k$，则

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}f(z)dz=ik(\theta_2-\theta_1)$$

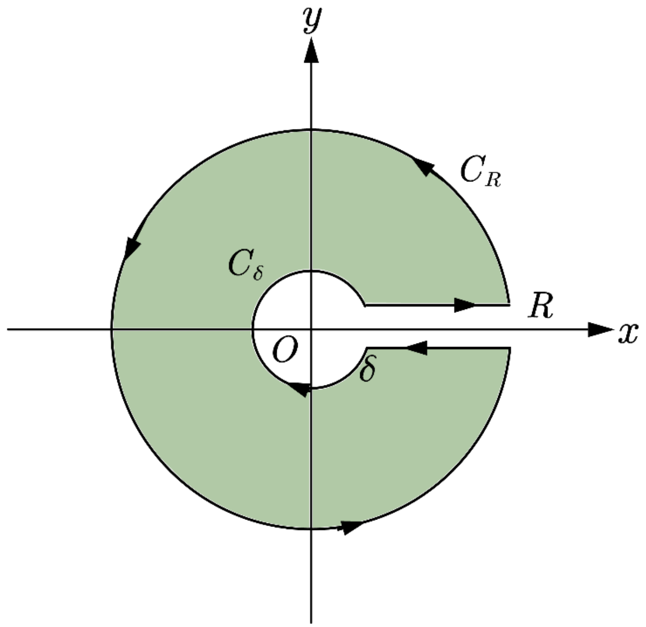
由小圆弧引理，$\lim\limits_{z\to 0}\left[z\cdot\frac{1}{z(1+z+z^2)}\right]=1$，$\lim\limits_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{dz}{z(1+z+z^2)}=-\pi i$

故 $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x(1+x+x^2)}=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \delta\to 0}}\left[\int_{-R}^{-\delta}\frac{dx}{x(1+x+x^2)}+\int_{\delta}^{R}\frac{dx}{x(1+x+x^2)}\right]=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

➢ 类型七：多值函数的复积分

例7：计算积分 $\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{x+e^{i\phi}}dx$，$0<\alpha<1$，$-\pi<\phi<\pi$

解析：考虑复积分 $\int\frac{z^{\alpha-1}}{z+e^{i\phi}}dz$ ，此时分子的$z^{\alpha-1}$是多值函数，$z=0$及∞是其支点



将复平面沿正实轴割开，采用如图所示的块形围道，并规定割线上岸$\arg z=0$, 则该围道积分可拆分成几个部分

$$\oint_C\frac{z^{\alpha-1}}{z+e^{i\phi}}dz=\int_\delta^R\frac{x^{\alpha-1}}{x+e^{i\phi}}dx+\int_{C_R}\frac{z^{\alpha-1}}{z+e^{i\phi}}dz+\int_R^\delta\frac{(xe^{2\pi i})^{\alpha-1}}{x+e^{i\phi}}dx+\int_{C_\delta}\frac{z^{\alpha-1}}{z+e^{i\phi}}dz$$

在$0<\alpha<1$的条件下，$\lim\limits_{z\to0}\left(z\cdot\frac{z^{\alpha-1}}{z+e^{i\phi}}\right)=0$，$\lim\limits_{z\to\infty}\left(z\cdot\frac{z^{\alpha-1}}{z+e^{i\phi}}\right)=0$

因此 $\lim\limits_{\delta\to0}\int_{C_\delta}\frac{z^{\alpha-1}}{z+e^{i\phi}}dz=0$ ，$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z^{\alpha-1}}{z+e^{i\phi}}dz=0$

并且，被积函数在围道内只有一个奇点$z=e^{i(\phi+\pi)}$，由于其为单极点，因此

$$\operatorname{Res} f(e^{i(\phi+\pi)})=\left.\frac{z^{\alpha-1}}{(z+e^{i\phi})'}\right|_{z=e^{i(\phi+\pi)}}=-e^{i\pi\alpha}e^{i\phi(\alpha-1)}$$

原式 $=\int_{\delta}^{R}\frac{x^{\alpha-1}}{x+e^{i\phi}}dx+\int_{R}^{\delta}\frac{(xe^{2\pi i})^{\alpha-1}}{x+e^{i\phi}}dx=(1-e^{2\pi i\alpha})\int_{\delta}^{R}\frac{x^{\alpha-1}}{x+e^{i\phi}}dx=2\pi i\cdot-e^{i\pi\alpha}e^{i\phi(\alpha-1)}$

因此 $\int_{0}^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{x+e^{i\phi}}dx=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\cdot e^{i\phi(\alpha-1)}$

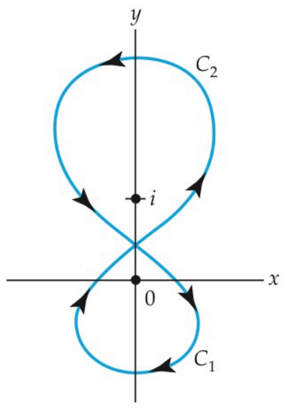


Figure 5.45 Contour for Example 4

EXAMPLE 4 Using Cauchy's Integral Formula for Derivatives

Evaluate $\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz$, where C is the figure-eight contour shown in Figure 5.45.

Solution Although C is not a simple closed contour, we can think of it as the union of two simple closed contours C_1 and C_2 as indicated in Figure 5.45. Since the arrows on C_1 flow clockwise or in the negative direction, the opposite curve $-C_1$ has positive orientation. Hence, we write

$$\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz = \int_{C_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz + \int_{C_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz$$

$$= -\oint_{-C_1} \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}\,dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}\,dz = -I_1 + I_2,$$

and we are in a position to use both formulas (1) and (6).

To evaluate I_1 we identify $z_0 = 0$, $f(z) = (z^3+3)/(z-i)^2$, and $f(0) = -3$. By (1) it follows that

$$I_1 = \oint_{-C_1} \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}\,dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i(-3) = -6\pi i.$$

To evaluate I_2 we now identify $z_0 = i$, $n = 1$, $f(z) = (z^3+3)/z$, $f'(z) = (2z^3-3)/z^2$, and $f'(i) = 3+2i$. From (6) we obtain

$$I_2 = \oint_{C_2} \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(i) = 2\pi i(3+2i) = -4\pi + 6\pi i.$$

Finally, we get

$$\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}\,dz = -I_1 + I_2 = 6\pi i + (-4\pi + 6\pi i) = -4\pi + 12\pi i.$$

6.6.4 The Argument Principle and Rouché's Theorem

Argument Principle Unlike the foregoing discussion in which the focus was on the evaluation of real integrals, we next apply residue theory to the location of zeros of an analytic function. To get to that topic, we must first consider two theorems that are important in their own right.

In the first theorem we need to count the number of zeros and poles of a function f that are located within a simple closed contour C; in this counting we include the order or multiplicity of each zero and pole. For example, if

$$f(z) = \frac{(z-1)(z-9)^4(z+i)^2}{(z^2-2z+2)^2(z-i)^6(z+6i)^7} \tag{27}$$

and C is taken to be the circle $|z| = 2$, then inspection of the numerator of f reveals that the zeros inside C are $z = 1$ (a simple zero) and $z = -i$ (a zero of order or multiplicity 2). Therefore, the number N_0 of zeros inside C is taken to be $N_0 = 1 + 2 = 3$. Similarly, inspection of the denominator of f shows, after factoring $z^2 - 2z + 2$, that the poles inside C are $z = 1 - i$ (pole of order 2), $z = 1 + i$ (pole of order 2), and $z = i$ (pole of order 6). The number N_p of poles inside C is taken to be $N_p = 2 + 2 + 6 = 10$.

Theorem 6.20 Argument Principle

Let C be a simple closed contour lying entirely within a domain D. Suppose f is analytic in D except at a finite number of poles inside C, and that $f(z) \neq 0$ on C. Then

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_0 - N_p, \tag{28}$$

where N_0 is the total number of zeros of f inside C and N_p is the total number of poles of f inside C. In determining N_0 and N_p, zeros and poles are counted according to their order or multiplicities.