大学物理复习——静电场

傅 林

目录

Part 1. 场论简介

1. 简单来说，场是关于空间坐标(x,y,z)的函数.

- 数量场：给定一个坐标(x,y,z)，都有一个唯一确定的数量 $f(x,y,z)$
- 向量场：给定一个坐标(x,y,z)，都有一个唯一确定的向量$\vec{F}(x,y,z)$

物理中存在各种各样的场，常见的数量场有温度场、密度场；向量场有静电场、磁场、流速场等.

2. Nabla算子：$\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\dfrac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$

它是一个形式上的n维向量. 一般来说，我们分析三维空间 $\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$

3. 梯度、散度、旋度：

- 梯度：当Nabla算子作用于数量场$f(x,y,z)$，得 $\nabla f(x,y,z)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$

梯度指向函数增长最快的方向；梯度必定与等值线(面)垂直.

➢ 散度：当Nabla算子点乘向量场$\vec{F}=(P,Q,R)$，得 $\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

➢ 旋度：当Nabla算子叉乘向量场$\vec{F}=(P,Q,R)$，得

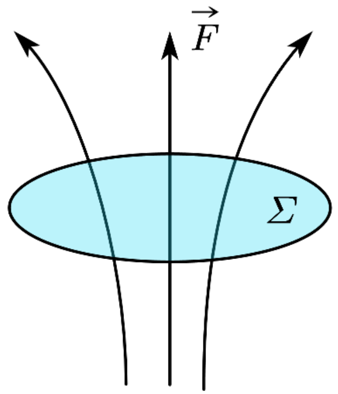
$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

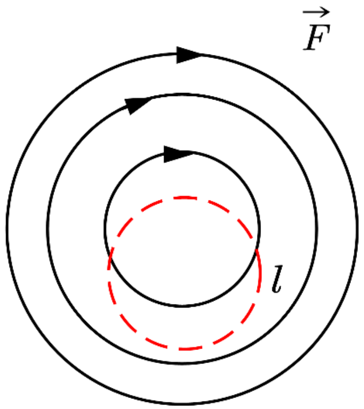
散度描述了向量场发散的强弱程度，旋度描述了向量场的旋转性质.

4. 通量和环量：

通量：$\iint_{\Sigma}\vec{F}\cdot d\vec{S}$　　环量：$\oint_{l}\vec{F}\cdot d\vec{l}$

*第二类曲面和曲线积分





5. Gauss公式：

$$\oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{F}dV$$

散度是通量的体密度！

6. Stokes公式：

$$\oint_{l}\vec{F}\cdot d\vec{l}=\oint_{l}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}\nabla\times\vec{F}dS$$

旋度是环量的面密度！

7.Laplace算子：当Nabla算子与自身作点乘时，得到Laplace算子 $\Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

作用于数量场$f(x,y,z)$，表示其梯度的散度

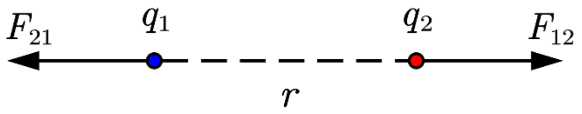
8.Hessian矩阵：当Nabla算子与自身作外积时，得到一个矩阵

$$\nabla=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_n}\end{bmatrix},\ \nabla\nabla^T=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}$$

9. $\nabla\cdot\vec{F}\equiv0$，则称$\vec{F}$为无源场，反之为有源场

同理，$\nabla\times\vec{F}\equiv0$，则称$\vec{F}$为无旋场，反之为有旋场

1. 库仑定律：真空中，两个静止的点电荷之间的相互作用力满足下列关系式



$$\overrightarrow{F_{12}} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{e_{12}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{e_{12}}$$

式中k是静电力常量，$\overrightarrow{e_{12}}$是q_1到q_2方向的单位矢量，ε_0是真空介电常量.

2. 电场强度：设试探电荷的电量为q_0，在空间中某点受到的电场力为$\vec{F}$，则该点场强定义为

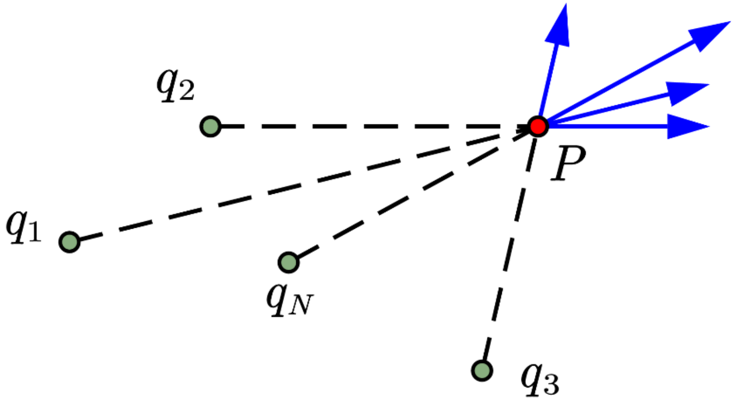
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

*点电荷场强公式：$\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\vec{e_r}$

3. 叠加原理：计算点电荷组、连续带电体在空间中的场强分布时，我们需要使用叠加原理.

叠加原理遵循的原则：离散则求和，连续则积分

- n个点电荷的场强：$\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{q_k}{\left|\vec{r}-\vec{r}_k\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{r}_k\right)$
- 线电荷的场强：$\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L\dfrac{\lambda_e\left(\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)dl'$
- 面电荷的场强：$\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S\dfrac{\sigma_e\left(\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)dS'$
- 体电荷的场强：$\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V\dfrac{\rho_e\left(\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)dV'$

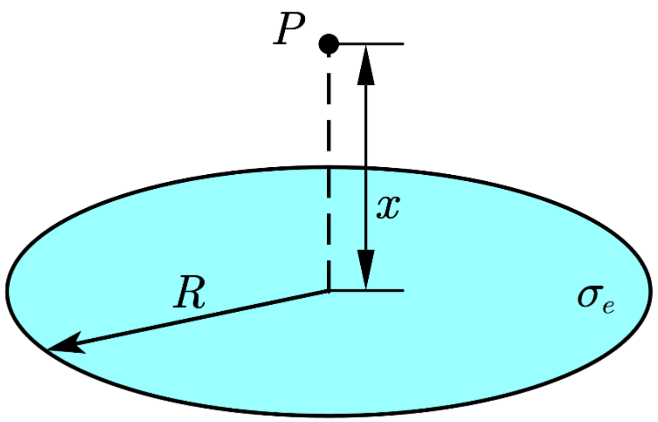


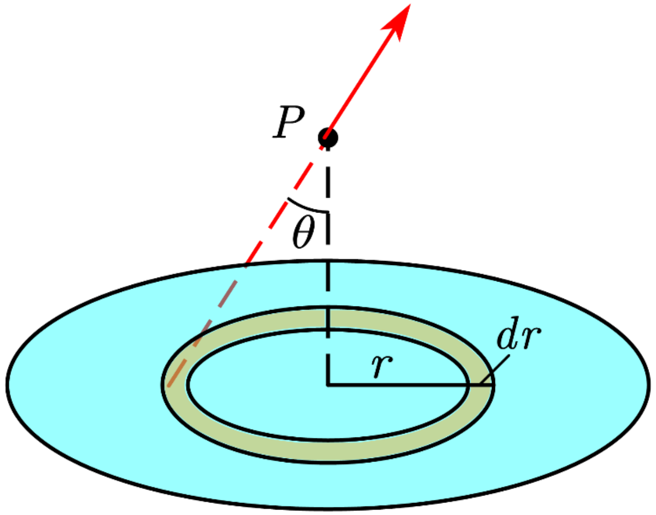
[例题]半径为R的圆面上均匀带电，电荷的面密度为σ_e

(1) 求轴线上离圆心的坐标为x处的场强；

(2) 在保持σ_e不变的情况下，当$R \to 0$和$R \to \infty$时结果各如何？

(3) 在保持总电量$Q = \pi R^2 \sigma_e$不变的情况下，当$R \to 0$和$R \to \infty$时结果各如何？





(1) 将圆面分解成一个个小圆环，现在计算一个圆环微元在P点的场强

圆环上一点在P点的场强 $dE=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dq}{r^2+x^2}\cos\theta=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{xdq}{(r^2+x^2)^{3/2}}$

因此整个圆环在P点的场强 $dE_{环}=\oint dE=\dfrac{x}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)^{3/2}}\oint dq=\dfrac{x}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\sigma_e 2\pi rdr}{(r^2+x^2)^{3/2}}$

整个圆面的场强为 $E=\displaystyle\int_0^R\frac{x}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_e 2\pi rdr}{(r^2+x^2)^{3/2}}=\frac{x\sigma_e}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$

(2) σ_e不变时，$R\to 0$时，$E=0$；$R\to\infty$时，$\boxed{E=\dfrac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}}$ ← 无限大均匀带电平面

(3) $Q=\pi R^2\sigma_e$不变时，可将场强公式写成 $E=\dfrac{xQ}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$

当$R\to\infty$时，$E=0$；$R\to 0$时，$E=\dfrac{xQ}{2\pi\varepsilon_0}\lim\limits_{R\to 0}\dfrac{\sqrt{R^2+x^2}-x}{R^2x\sqrt{R^2+x^2}}=\boxed{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}}$ ← 点电荷场强

Part 3.静电场的性质

1. Gauss定理：$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$

由于 $Q = \iiint_V \rho_e dV$，因此 $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} dV$，由Gauss公式，得到 $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$

*静电场是有源场，其散度来源于电荷密度！

2. 环路定理：$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 由Stokes公式，得到 $\nabla \times \vec{E} = 0$

*静电场是无旋场，揭示了电场力做功与路径无关（保守力）这一性质！

3. 电势能：由于电场力做功与路径无关，即只由始末位置决定，因此我们可以定义电势能，去描述电场力做功.试探电荷q_0从场点A移动到场点B，电场力的做功等于电势能的减小，即

$$W = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -(E_{pB} - E_{pA})$$

一般我们取无穷远为零势能点，则q_0电场中某一点P的电势能为：$E_p = q_0 \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

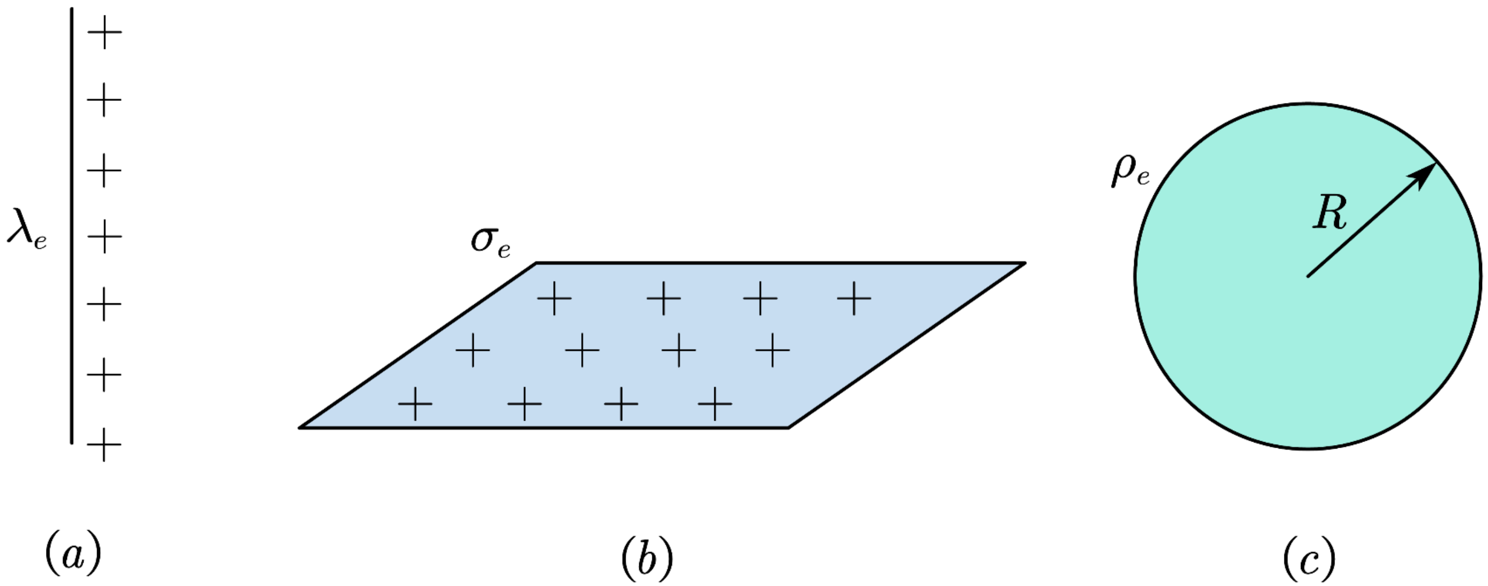
4. 电势：电势能的大小与电荷的电荷量有关，不能反映静电场本身的性质。因此，我们定义电势为电势能与电荷量的比值.

$$U = \frac{E_p}{q_0} = \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

说明：

- 电势是标量，其叠加满足标量的直接数量叠加
- 点电荷电场的电势公式：$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$
- 电场强度和电势的微分关系：$\vec{E} = -\nabla U$，因此电场线必定与等势面垂直.
- 在没有电荷的区域，静电场的电势满足Laplace方程：$\nabla^2 U = 0$

[例题](a)为无限长均匀带电直线，(b)为无限大均匀带电平面，(c)为半径为R的均匀带电球求其在空间中的电场分布.

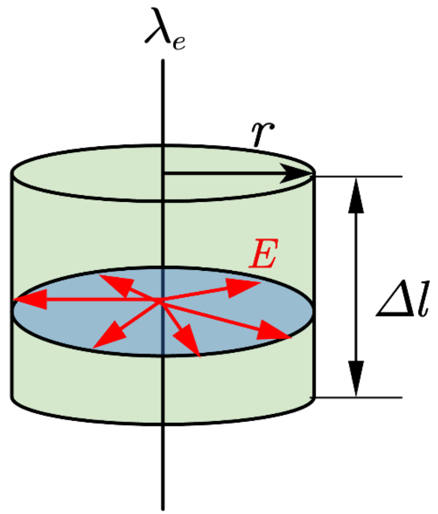


一维对称结构

(1) 对无限长带电线，取同轴圆柱面为Gauss面

由Gauss定理：$\displaystyle\oiint_{\Sigma}\vec{E}\cdot d\vec{S}=E\cdot 2\pi r\Delta l=\frac{1}{\varepsilon_0}\lambda_e\Delta l$

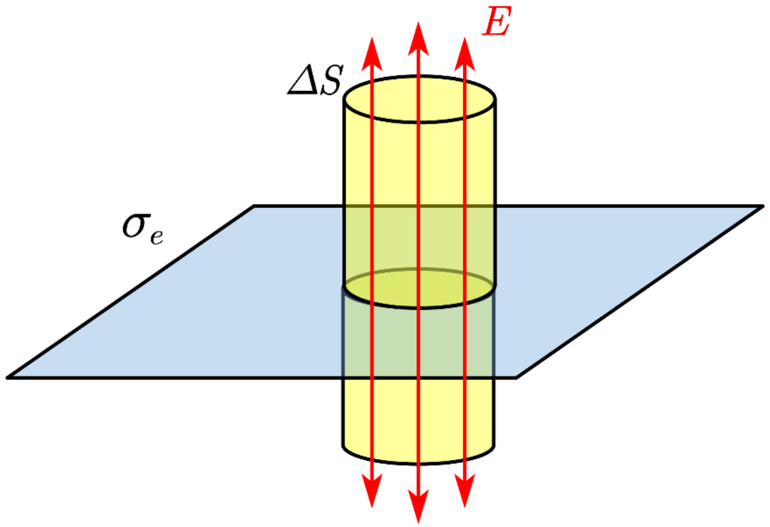
因此 $\displaystyle E=\frac{\lambda_e}{2\pi\varepsilon_0 r}$



(2) 对无限大带电面，取轴线与带电面垂直的柱面为Gauss面

由Gauss定理：$\displaystyle\oiint_{\Sigma}\vec{E}\cdot d\vec{S}=E\cdot 2\Delta S=\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma_e\Delta S$

因此 $\displaystyle E=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}$



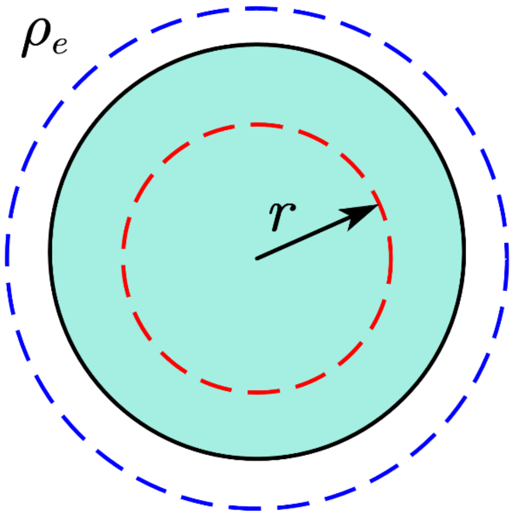
(3) 对均匀带电球，取同心球面为Gauss面

当$r<R$时，由Gauss定理：$\oint\!\!\oint_{\Sigma}\vec{E}\cdot d\vec{S}=E\cdot 4\pi r^2=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_e\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3$

因此 $E=\dfrac{\rho_e}{3\varepsilon_0}r$

当$r>R$时，由Gauss定理：$\oint\!\!\oint_{\Sigma}\vec{E}\cdot d\vec{S}=E\cdot 4\pi r^2=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho_e\dfrac{4}{3}\pi R^3$

因此 $E=\dfrac{\rho_e R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$

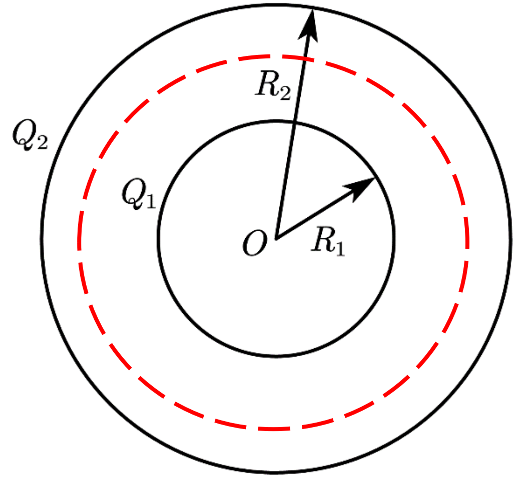


*在上面的分析中，我们都将曲面积分转化为了简单的几何计算，这与Gauss面的巧妙选取有关；一般情况下，我们选取Gauss面遵循下面两个原则：

①Gauss面上各点E的大小相等；　②E与Gauss面处处垂直.

[例题]有两个半径分别为R_1和R_2的两个同心带电球面，所带电量分别为Q_1和Q_2，求电势分布.

如图所示，取同心球面作为Gauss面



当$r < R_1$时，$\oiint_{\Sigma} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow E = 0$

当$R_1 < r < R_2$时，$\oiint_{\Sigma} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{Q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

当$r > R_2$时，$\oiint_{\Sigma} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{Q_1+Q_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \dfrac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

因此，当$r < R_1$时，$U(r) = \int_r^{R_1} E_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^{\infty} E_3 dr = \int_{R_1}^{R_2} \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \dfrac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

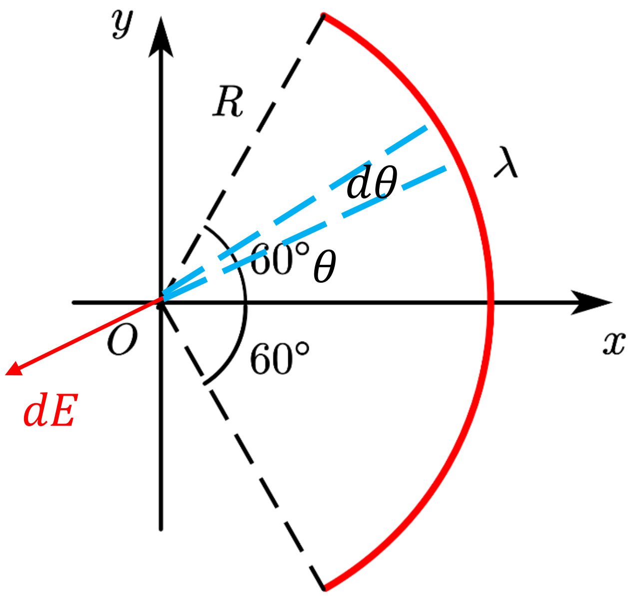
当$R_1 < r < R_2$时，$U(r)=\int_r^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^{\infty} E_3 dr = \int_r^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

当$r > R_2$时， $U(r)=\int_r^{\infty} E_3 dr = \int_r^{\infty} \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

观察上面三种情况，虽然$U(r)$是分段函数，但是$U(r)$在分界点上始终是连续的，也就是电势在界面处不会发生跃变，这是静电场重要的边值问题之一！

1. 一个均匀带电的塑料细杆被弯成半径为R的圆心角为120°的圆环，如图所示。若塑料细杆的电荷线密度为λ，求环心O处的电场强度。



解析：在圆环上取角度为$d\theta$的弧元，对每段弧元单独分析有

$$dE' = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\theta}{R^2}\cos\theta$$

因此，整个圆环在O点产生的电场强度为

$$E = \int dE' = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\cos\theta d\theta}{R} = \frac{\sqrt{3}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

2. 一个半径为R的带电球体，其电荷体密度分布为 $\rho=\begin{cases}\dfrac{qr}{\pi R^4}\,(r\leqslant R)\\ 0\,(r>R)\end{cases}$，其中$q$为正常量. 求：

(1) 带电球体的总电荷；(2) 球内、外各点的电场强度；(3) 球内、外各点的电势.

(1) $Q=\iiint\rho dV=\int_0^R\frac{qr}{\pi R^4}\cdot 4\pi r^2dr=\frac{4q}{R^4}\int_0^R r^3dr=q$

依然具有一维对称结构！

(2) 取同心球面为Gauss面

当$r<R$时，$\oiint_\Sigma\vec{E}\cdot d\vec{S}=E\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r\frac{qr}{\pi R^4}\cdot 4\pi r^2dr=\frac{qr^4}{\varepsilon_0R^4}\Rightarrow E=\frac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0R^4}$

当$r>R$时，$\oiint_\Sigma\vec{E}\cdot d\vec{S}=E\cdot 4\pi r^2=\frac{q}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$

(3) 当$r<R$时，$U(r)=\int_r^R E_1 dr+\int_R^\infty E_2 dr=\int_r^R \frac{qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}dr+\int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{3\pi\varepsilon_0 R}-\frac{qr^3}{12\pi\varepsilon_0 R^4}$

当$r>R$时，$U(r)=\int_r^\infty E_2 dr=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Part 5. Maxwell方程组

积分形式

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

涡旋电场假设

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_0 + \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

位移电流假设

微分形式

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{e0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$