分析力学授课——拉格朗日力学

傅林

Central South University

2024.3.27

本章内容

本章内容

一、位形空间

1. 力学研究的基本问题，是动力学系统随时间的演化. 具体而言，是要研究力学系统的“位形”随时间的演化.

位形

位形 (configuration) 指力学系统各个质点的空间位置，它反映质点系或更一般力学体系在空间中的形状、分布. 例如一个 N 个质点组成的质点系，给出 N 个质点的位矢

$$\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N\}$$

即给出了质点系的一个位形.

2. 系统所有可能位形的集合，便构成位形空间 (configuration space). 位形空间中的一点，就代表系统的一种可能的位形.
* 值得一提的是，位形空间一般都不是平直的线性空间. 数学上对这种一般的、弯曲的空间的描述，叫做流形 (manifold) 理论.

3. 速度相空间：仅得到力学系统的位形，是不能唯一确定其状态的. 但是“位形”和“速度”合在一起，就构成了力学系统的“状态”. 如果知道某一时刻的状态，原则上就知道了此前或此后任一时刻的状态.

对 N 个质点组成的质点系，给出所有质点的位矢和速度

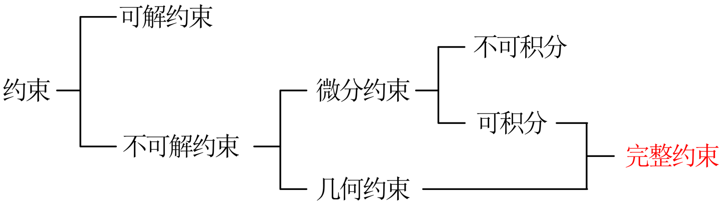
$$\left\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N; \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \cdots, \dot{\vec{r}}_N\right\}$$

即给出了质点系的一个“状态”. “位形 + 速度”构成的状态空间。即是所谓速度相空间.

拉格朗日力学研究速度相空间的演化，哈密顿力学研究相空间中的演化.

4. 约束 (constraint) 是对系统状态的限制，也就是对“位形”和“速度”的限制. 对一个 N 个质点构成的质点系，约束的一般表达式为

$$f\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N; \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \cdots, \dot{\vec{r}}_N; t\right) = 0$$



约束的存在，表明速度相空间中有些地方是无法到达的，实际能够到达的只是其某个子空间. 本课程只考虑完整约束系统!

5. 之前的力学课程中，在二维空间我们采用平面直角系和极坐标系对其参数化，在三维空间我们采用空间直角系、球坐标和柱坐标对其参数化.

广义坐标

广义坐标 (generalized coordinates) 是对位形空间的参数化，是任何一组能唯一确定系统位形的独立参量.

- 自由度：是系统的内禀与本质属性
- 广义坐标：参数化系统位形的数学手段

对于完整约束系统，广义坐标个数等于系统自由度.

广义坐标一般用 $\{q_1, q_2, \cdots, q_s\}$ 表示，对时间求导可得到广义速度

$$\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s\}$$

本章内容

二、虚功原理

1. 设有一个 N 个质点组成的质点系，在 t 时刻的位形是 $\{\vec{r}_i\}, i=1,2,\cdots,N$
   - 实位移：质点由于运动实际上所发生的位移，在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻，位形是 $\{\vec{r}_i+\mathrm{d}\vec{r}_i\}$
   - 虚位移：假定时间不变 ($\delta t=0$)，质点在约束允许的情况下发生的假想的位移，记为 $\delta\vec{r}_i$

2. 区分两种力
   - 约束力：记为 $\vec{R}$，迫使力学系统遵守约束条件的力
   - 主动力：记为 $\vec{F}$，和约束无关的力

3. 虚功 (virtual work)：主动力和约束力在虚位移下所做的功

$$\delta W=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i+\vec{R}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i$$

4. 理想约束 (ideal constraint)：如果系统所有约束力所做的虚功之和为零，即

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

则该约束称为理想约束.

虚功原理

对于理想约束系统，当其平衡时主动力所做的虚功为零，即

$$\sum_{i} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

要说明的是，虚功原理处理的是平衡问题，也就是静力学问题. 对于一般的动力学问题，它便无能为力.

5. 广义力：由于约束的存在，$\delta \vec{r}_i$ 之间并不独立，因此由虚功原理并不能推出 $\vec{F}_i = 0$. 但我们可以利用广义坐标对公式进行改写. 由 $\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, q_2, \cdots, q_s; t\right)$，可得

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \delta t = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha$$

代回虚功原理，得

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha\right) = 0 \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) \delta q_\alpha = 0$$

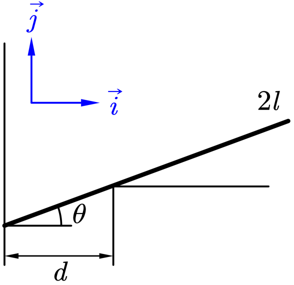
由于广义坐标之间是独立的，因此必然有

$$Q_\alpha = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0$$

我们把 Q_α 叫做广义力，它的引入有点类似于牛顿力学中平衡则所受合力为零的思想.

例 2.1

长度为 $2l$ 的匀质杆一端抵在光滑的墙上，杆身斜靠在与墙相距 d 的光滑棱角上，求杆与水平面所夹角度 θ.



6. 保守系统的虚功原理：当作用在系统上的作用力都是保守力时，虚功原理还可以改写成另一种更加简便的形式. 我们知道保守力对应一种势能

$$\vec{F}_i = -\nabla_i V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\vec{k}\right)$$

且在笛卡尔坐标下，

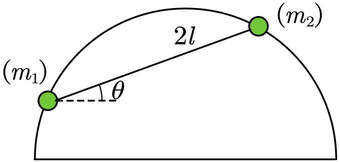
$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\vec{i} + \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha}\vec{j} + \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\vec{k}$$

代入 $Q_\alpha = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0$，得到

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \sum_i -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\right) \\ &= -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0 \end{aligned}$$

例 2.2

光滑钢丝弯成半径为 R 的半圆并竖直放置，钢丝上穿着两个质点，其质量分别为 m_1 和 m_2，两质点由长度为 $2l$ 的不可伸长的轻绳连起来，求平衡时绳与水平面所作角度 θ.



本章内容

1. 前面我们已经提到，虚功原理只能够处理静力学问题. 要处理动力学问题，就需要用到我们接下来要介绍的拉格朗日方程.

Lagrange's equation

对一个一般的力学系统，可定义其拉格朗日量 (Lagrangian) 为动能与势能之差，即

$$L = T - V$$

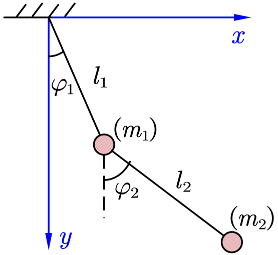
拉氏量 L 会满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

拉格朗日方程的推导略. 之后我们处理动力学问题，关键是写出该系统的拉氏量，只要我们能正确写出它，之后的计算就非常容易了.

2. 下面我们以一些例子，说明求解拉格朗日量的方法.

(1) 平面双摆：取绳 l_1 和 l_2 分别于竖直方向的夹角 φ_1 和 φ_2 为广义坐标.



对质点 1，容易求得

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \; U_1 = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1$$

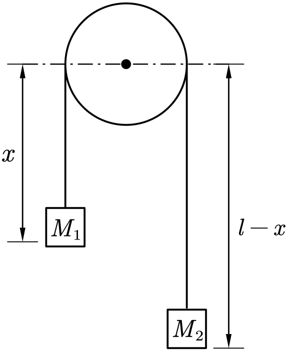
把质点 2 的直角坐标用广义坐标表示

$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2$$
$$y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \frac{1}{2} m_2 \left[l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right]$$

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \left(m_1 + m_2\right) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2$$

(2) 阿特伍德机：忽略滑轮的摩擦和质量，取 M_1 的位置坐标 x 为广义坐标



$$V = -M_1 g x - M_2 g (l - x)$$

$$T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2$$

$$L = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2 + M_1 g x + M_2 g (l - x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (M_1 - M_2)g, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2)\dot{x}$$

代入 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial x}$，得到

$$(M_1 + M_2)\ddot{x} = (M_1 - M_2)g \Rightarrow \ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}g$$

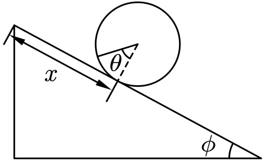
3. 在之前的问题里面，广义坐标之间是彼此独立的. 如果现在广义坐标之间存在约束，该如何处理呢?

拉氏乘子法

假设广义坐标之间存在约束 $f(t, q_\alpha) = 0$，可引入拉氏乘子 $\lambda(t)$，此时拉格朗日方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}$$

下面我们举一个例子：一个质量为 M，半径为 R 的圆环在倾角为 ϕ 的斜坡上做纯滚动，求其加速度和角加速度.



取 x 和 θ 为广义坐标，由于纯滚动存在约束

$$x = R\theta \to f = x - R\theta = 0$$

然后写出系统的拉氏量

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2,\ V = Mg\,(l - x)\sin\phi$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + Mg\,(x - l)\sin\phi$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}$，得

$$M\ddot{x} - Mg\sin\phi - \lambda = 0 \tag{1}$$

由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta}$，得

$$MR^2\ddot{\theta} + \lambda R = 0 \tag{2}$$

且纯滚动约束关系有另一形式：

$$\ddot{x} = R\ddot{\theta} \tag{3}$$

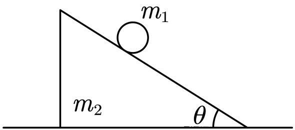
联立 (1)(2)(3)，可解得

$$\ddot{x}=\frac{g\sin\phi}{2},\lambda=-\frac{Mg\sin\phi}{2},\ddot{\theta}=\frac{g\sin\phi}{2R}$$

下面补充一道牛顿力学中很经典的题，请用本节学的拉格朗日方程进行求解.

例 3.1

质量为 m_1 的质点沿着质量为 m_2 的斜劈下滑，斜劈的劈角为 θ，忽略一切摩擦阻力，求质点的水平加速度 $\ddot{x}_1$ 和斜劈的加速度 $\ddot{x}_2$.



本章内容

四、循环坐标与能量积分

1. 面临的问题：我们之前介绍的拉格朗日方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$ 依然是一个二阶微分方程组，因此我们要想办法降阶.

cyclic coordinates

若拉氏量 L 中不显含某广义坐标 q_α，此坐标称为循环坐标. 此时 $\dfrac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$，拉格朗日方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = 0$$

定义广义动量 $p_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$，则显然有广义动量守恒，即 $p_\alpha = \mathrm{const}$

可以证明，当 q_α 为普通直角坐标时，对应的 p_α 为动量，得到动量守恒定律；当 q_α 为角坐标时，对应的 p_α 为角动量，得到角动量守恒定律.

2. 利用牛顿力学可以推导出机械能守恒，即 $T+V=\mathrm{const}$，那么分析力学能做到吗？

如果我们能把拉格朗日方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$ 想办法化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\square=\frac{\partial L}{\partial t} \tag{*}$$

式中 □ 为某个表达式，则当 L 不显含 t 时，□ 将为守恒量，且和 L 有相同的量纲 (能量). 因此我们下面所有的工作都是为了凑出 (*) 式的形式.

将 $L=T-V$ 代入拉格朗日方程，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \tag{1}$$

将上式左右两边同时乘上广义速度 $\dot{q}_\alpha$，得到

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\right]\dot{q}_\alpha-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha \tag{2}$$

由于 (2) 式对每一个广义坐标均成立，因此我们可以把 (2) 式求和

$$\sum_{\alpha}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\right]\dot{q}_\alpha-\sum_{\alpha}\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha=-\sum_{\alpha}\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha \tag{3}$$

再利用求导法则，把 $\dot{q}_\alpha$ 移入对 t 的导数

$$\sum_{\alpha}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)\right]-\sum_{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha-\sum_{\alpha}\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha=-\sum_{\alpha}\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha \tag{4}$$

注意 (4) 中出现了动能 T 对广义坐标和广义速度的偏导，这意味着 T 是关于它们的函数，即

$$T=T(q_1,\cdots,q_s;\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s;t) \tag{5}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial T}{\partial t}+\sum_{\alpha}\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\sum_{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha \tag{6}$$

而势能 V 仅与广义坐标有关，与广义速度无关，即

$$V = V(q_1, \cdots, q_s; t) \tag{7}$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha \tag{8}$$

利用 (6) 和 (8)，可将 (4) 写为

$$\sum_\alpha \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)\right] - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial t} \tag{9}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - T + V\right] = \frac{\partial}{\partial t}(V - T) = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{10}$$

我们发现，式 (10) 已经具有了和 (*) 式一样的形式！

当 L 不显含 t 时，必然有

$$\sum_{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - T + V = \text{const}$$

左边的守恒量是机械能吗?

3. 下面的工作，便是探究我们得到的守恒量到底是什么. 由于式子中含有 T 对广义速度的偏导，因此我们不妨把 T 先用广义坐标表示.

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, \cdots, q_s, t\right) \to \dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha$$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)$$

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad \text{广义速度的零次齐次函数} \\
&+ \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \quad \text{一次齐次函数} \\
&+ \sum_i \frac{1}{2} m_i \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \cdot \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta \quad \text{二次齐次函数} \\
&= T_0 + T_1 + T_2
\end{aligned}
$$

齐次函数的欧拉定理

若 f 是 n 次齐次函数，则

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = nf$$

利用此定理，可得

$$\sum_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha = 0 \cdot T_0 + 1 \cdot T_1 + 2 \cdot T_2$$

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - T + V &= (T_1 + 2T_2) - (T_0 + T_1 + T_2) + V \\ &= T_2 - T_0 + V \end{aligned}$$

也就是说，分析力学可推导出 $T_2 - T_0 + V$ 守恒，这显然不是机械能，我们把这个能量叫做广义能量. 这也就说明，在一些情况下机械能或许不守恒，但这个新定义的广义能量却是守恒的.

4. 之前的推导其实有一个很大的限制：势能 V 只与广义坐标有关，而与广义速度无关，这其实建立在主动力是保守力的前提上. 为了得到更加一般的规律，我们引入广义势

$$U = U(q_1, \cdots, q_s; \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_s; t)$$

此时势能可以显含广义速度，拉氏量

$$L = T - U$$

然后我们再按照前面相似的步骤推导一遍：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

$$\sum_\alpha \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\right] \dot{q}_\alpha = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha$$

$$\sum_\alpha \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha\right)\right] - \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial L}{\partial t}+\sum_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}\dot{q}_{\alpha}+\sum_{\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\ddot{q}_{\alpha}$$

因此

$$\sum_{\alpha}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\dot{q}_{\alpha}\right)\right]-\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

当拉氏量 L 不显含时间 t 时，必然有

$$h=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}\dot{q}_{\alpha}-L=\mathrm{const}$$

上面的 h 叫做能量函数，它是一个比广义能量还要广义的物理量！在后续的课程 (如电动力学) 中，真正守恒的将是这个能量函数 h，而不再是广义能量.