

数学物理方法课程辅学

Lecture 1. 数学物理方程

傅林

Central South University
物理学院

2024.12

目录

- 1 序言：数学之于物理
- 2 基础知识梳理
- 3 应用例

目录

1 序言：数学之于物理

2 基础知识梳理

3 应用例

什么是数学物理

数学物理(Mathematical physics) 是数学和物理学的交叉领域, 指应用特定的数学方法来研究物理学的某些部分. 对应的数学方法也叫**数学物理方法**. 数学和物理学的发展在历史上一直密不可分, 许多数学理论是在物理问题的基础上发展起来的; 很多数学方法和工具通常也只在物理学中找到实际应用.

- A. Zee: The Creator speaks the language of mathematics
- Galileo Galilei: “……learn the language and grasp the symbols …, written in the mathematical language…”
- Eugene Wigner: “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences”

主要内容

微分方程的求解

很多物理问题，比如在经典力学和量子力学中求解运动方程，都可以被归结为在一定边界条件下的对微分方程的求解. 因此求解微分方程成为数学物理的**最重要组成部分**. 相关的数学工具包括：

- 常微分方程 (ODE)
- 偏微分方程 (PDE)
- 复变函数与积分变换

对称性的研究

对称性是物理中的重要概念，它是**守恒律**的基础，在固体物理和量子场论中都有重要应用. 对称性由对称群或相关的代数结构描述，研究它的数学工具是：

- 群论
- 表示论

场的研究(场论)

场是现代物理的主要研究对象. 电动力学研究电磁场; 广义相对论研究引力场; 规范场论研究规范场. 对不同的可使用不同的数学工具, 包括:

- 矢量与张量分析
- 微分几何
- 代数几何
- 拓扑学

作用量理论

作用量理论被广泛应用于物理学的各个领域, 例如分析力学和路径积分. 相关的数学工具包括:

- 变分法
- 泛函分析

数学物理方程的地位

数学物理方程具有很强的物理背景，代表了前电脑时代人类的最高智慧水平. 自古以来，数学家和物理学家们写了一大堆微分方程，试图从牛顿力学的普遍原理得到一系列的方程，再通过解方程来模拟出大千世界. 很多物理问题的实质，就是解方程.

在四大力学中，尤其是量子力学和电动力学，解数学物理方程的功底会极大影响你的学习体验.

- 量子力学：没什么好说的，核心就是解薛定谔方程，解出来了体系状态的演变也就搞明白了.
- 电动力学：Maxwell 方程组支配着一切，具体体现在求解静电势和磁标势的 Laplace 方程 (Poisson 方程)，主要方法是分离变量法、镜像法、Green 函数法等.

数学太难学怎么办

秉持一个原则：

数学对于物理人只是工具，而不是目的

不要把数学物理方法这门课看成纯粹的数学课，然后去死磕一些数学上的推导证明，因为它们压根用不上（当然了自己有兴趣也行）。

比方说如果要在球坐标中解 Laplace 方程，只需要了解通解的形式，了解 Legendre 多项式的基本性质（如正交性等）。至于 Legendre 多项式到底是怎么推导的，其实没那么重要。**真正重要的是求解完方程后，那个解是否具有物理意义。**

而且如果你真要死磕数学，仅仅是“求和、积分、求导的顺序能不能随便交换”这个小问题，就够你喝两壶了。所以请善待自己。

目录

1 序言：数学之于物理

2 基础知识梳理

3 应用例

方程与边界条件

偏微分方程千千万，其中最具有代表性的是三个：

- **波动方程**: $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = a^2 \nabla^2 u$
- **热传导方程**: $\frac{\partial}{\partial t} u = a^2 \nabla^2 u$
- **Laplace 方程**: $\nabla^2 u = 0$

光有方程还不够，想要完全求解还需要定解条件（初始条件 + **边界条件**）。
以求解静电势的 Laplace 方程 $\nabla^2 \varphi = 0$ ：

- **Dirichlet 边界条件**: 给定边界上的电势值 $\varphi|_S$
- **Neumann 边界条件**: 给定边界上电势的法向导数 $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_S$

分离变量法

常微分方程比偏微分方程好求解 → 想办法将 PDE 化为 ODE

分离变量法

假设待求解函数是关于 x 和 t 的函数 $f(x, t)$, 令 $f(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, 则一般而言可以将 PDE 化为分别关于 X 和 T 的 ODE.

以波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 为例, 令 $u(x, t) = X(x) T(t)$, 则

$$XT'' = a^2 X'' T \longrightarrow \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0$$

再结合初始条件和边界条件, 即可求解.

连带 Legendre 函数

定义

方程

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0$$

的解称为连带 Legendre 函数, 记为 $P_l^m(x)$.

- $|m| > l$ 时, $P_l^m(x) = 0$
- 正交归一关系:

$$\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_k^m(x) = \frac{2\delta_{l,k}}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x^2} P_l^m(x) P_l^n(x) = \frac{(l+m)!}{m(l-m)!} \delta_{m,n}$$

Legendre 多项式

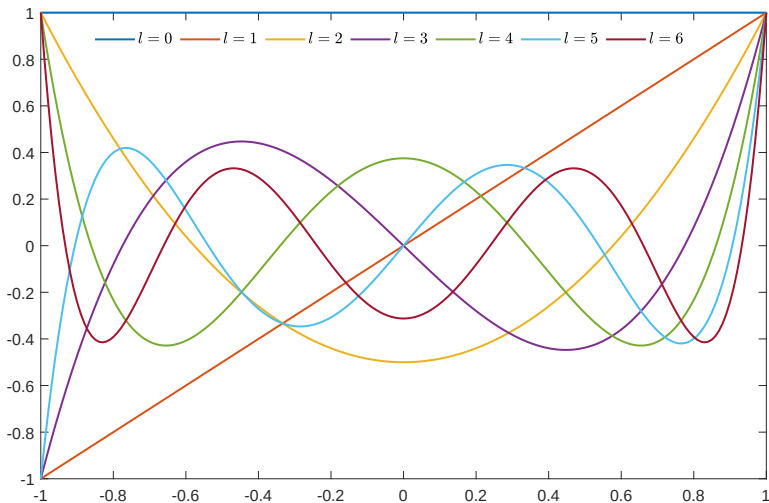
当 $m = 0$ 时, $P_l^m(x)$ 变成 x 的 l 阶多项式, 称为 Legendre 多项式.

- 表达式:
$$P_l(x) = \sum_{n=0}^l \frac{1}{(n!)^2} \frac{(l+n)!}{(l-n)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

- Rodrigues 公式:
$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

- 正交归一关系:
$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_l(x) dx = \frac{2\delta_{kl}}{2l+1}$$

- 生成函数:
$$\frac{1}{\sqrt{1+r^2-2rx}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^l$$



l 为奇数, 则 $P_l(x)$ 为奇函数; l 为偶数, 则 $P_l(x)$ 为偶函数

Bessel 函数和 Neumann 函数

定义

Bessel 方程

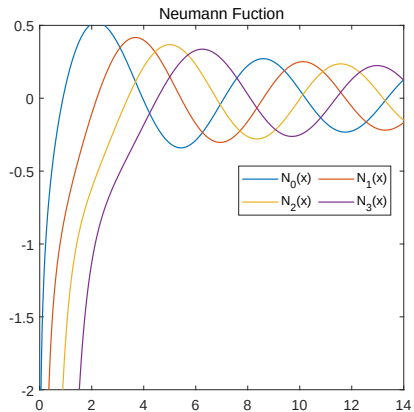
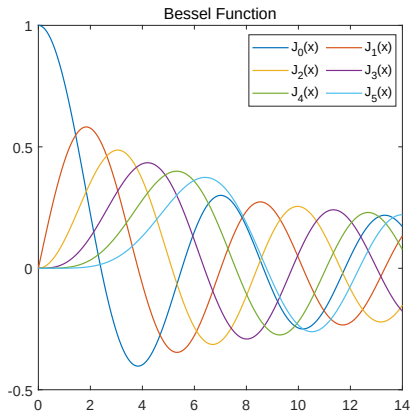
$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[x \frac{dy(x)}{dx} \right] + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y(x) = 0$$

的解称为 **Bessel 函数**:

$$J_{\pm\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k \pm \nu + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k \pm \nu}$$

而 **Neumann 函数** 是 Bessel 函数的线性组合:

$$N_{\nu}(x) = \frac{\cos \nu \pi J_{\nu}(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu \pi}$$



Bessel 函数的性质

- 递推关系:

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

- 带权重正交: 记 $x_{n,k}$ 为 $J_n(x)$ 的第 k 个零点, 则

$$\int_0^a J_n\left(\frac{x_{n,k}}{a}\rho\right) J_n\left(\frac{x_{n,m}}{a}\rho\right) \rho d\rho = 0 \quad (k \neq m)$$

- $J_0(0) = 1$, 其他阶 Bessel 函数在原点取 0
- Neumann 函数在原点处发散

虚宗量 Bessel 函数

定义

虚宗量 Bessel 方程

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) - \left(1 + \frac{m^2}{x^2} \right) y = 0$$

的一类解为 **第一类虚宗量 Bessel 函数**:

$$I_{\nu}(x) = e^{-i\nu\pi/2} J_{\nu}(xe^{i\pi/2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k + \nu}$$

第二类虚宗量 Bessel 函数为:

$$K_{\nu}(x) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} [I_{-\nu}(x) - I_{\nu}(x)]$$

函数的内积

定义

两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的内积定义如下:

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f^*(x) g(x) dx$$

- 如果一个函数与自身的内积为 1, 称之为**归一化的**
- 如果两个函数的内积为 0, 称这两个函数是**正交的**
- 如果一组函数既是归一的又是相互正交的, 称它们为**正交归一的**
- 如果存在一组函数, 其他任意函数都可以表为这组函数的线性组合, 称这组函数是**完备的**

函数的展开

从矢量空间说起：设 N 维矢量空间有一组标准正交基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N\}$ ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$)，则任意一个矢量 $\mathbf{A}$ 可被其线性表示：

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{e}_k$$

要求展开系数 c_k ，直接作内积：

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_m = \mathbf{e}_m \cdot \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^N c_k \delta_{km} = c_m$$

- **启发**：求函数的展开系数也可以作内积！

以 Legendre 多项式为例, 设任意函数 $f(x)$ 可被展开为

$$f(x) = \sum_l c_l P_l(x)$$

则左右同时与 $P_k(x)$ 作内积:

$$\int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx = \sum_l c_l \int_{-1}^1 P_l(x) P_k(x) dx = \sum_l c_l \frac{2\delta_{kl}}{2l+1} = \frac{2c_k}{2k+1}$$

因此展开系数为

$$c_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx$$

例题

将函数 $f(x) = x^3$ 按 Legendre 多项式展开.

由于 $f(x)$ 是三次函数, 因此最高展开到 P_3 ; 且 $f(x)$ 是奇函数, 因此展开式中只会含有奇次幂的 Legendre 多项式, 也就是 P_1 和 P_3 .

$$c_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x^3 \cdot x dx = \frac{3}{5}, c_3 = \frac{7}{2} \int_{-1}^1 x^3 \cdot \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) dx = \frac{2}{5}$$

因此展开结果为

$$x^3 = \frac{3}{5} P_1(x) + \frac{2}{5} P_3(x)$$

球坐标

在球坐标 (r, θ, ϕ) 中, $\nabla^2 u = 0$ 的通解为

$$u(r, \theta, \phi) = \left\{ \begin{matrix} r^l \\ r^{-l-1} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{matrix} \right\} P_l(\cos \theta)$$

问题具有轴对称性时, 可取对称轴为 z 轴, 这样一来问题便于 ϕ 无关, $m = 0$, 通解变为:

$$u(r, \theta) = \sum_l \left(a_l r^l + b_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

柱坐标

在柱坐标 (ρ, ϕ, z) 中, 首先判断齐次边界条件是关于 ρ 的还是 z 的. 当 ρ 具有齐次边界条件时,

- $\mu = 0, m = 0$, 则

$$u = \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \ln \rho \end{Bmatrix}$$

- $\mu = 0, m > 0$, 则

$$u = \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho^{-m} \\ \rho^m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix}$$

- $\mu > 0$, 则

$$u = \begin{Bmatrix} \exp(\sqrt{\mu}z) \\ \exp(-\sqrt{\mu}z) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J_m(\sqrt{\mu}\rho) \\ N_m(\sqrt{\mu}\rho) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix}$$

当 z 具有齐次边界条件时,

- $\mu = 0, m = 0$, 则

$$u = \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \ln \rho \end{Bmatrix}$$

- $\mu = 0, m > 0$, 则

$$u = \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho^{-m} \\ \rho^m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix}$$

- $\mu < 0$, 则

$$u = \begin{Bmatrix} \sin(\sqrt{-\mu}z) \\ \cos(\sqrt{-\mu}z) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_m(\sqrt{-\mu}\rho) \\ K_m(\sqrt{-\mu}\rho) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix}$$

目录

1 序言：数学之于物理

2 基础知识梳理

3 应用例

一维无限深方势阱

Schrödinger 方程

量子力学中, 体系的状态由波函数 $\Psi(x, t)$ 刻画, 其演变服从 Schrödinger 方程:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

使用分离变量法, 设 $\Psi(x, t) = \psi(x) \cdot \varphi(t)$, 代入方程得到:

$$i\hbar \psi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \varphi \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi\varphi$$

左右两边同时除以 $\psi\varphi$, 得到

$$i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V$$

左右两边必然等于一个常数, 记作 E , 则

$$i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V = E$$

得到两个常微分方程:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{iE}{\hbar} \varphi \quad (1)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \quad (2)$$

方程 (1) 很好求解, 其解为 $\varphi(t) = \exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right)$; 方程 (2) 称为 **定态 Schrödinger 方程**.

定态 Schrödinger 方程求解

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi$$

令势场 $V(x)$ 的分布如下:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ \infty, & \text{else} \end{cases}$$

显然在势阱外 $\psi(x) = 0$. 在势阱内 $V = 0$, 方程化为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \longrightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$$

这是一个简单的谐振动微分方程, 其解为:

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx, \quad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

且由边界条件 $\psi(0) = \psi(a) = 0$, 得到

$$B = 0, A \sin ka = 0 \longrightarrow ka = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

因此

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

又因为 $|\psi|^2$ 是粒子位置的概率密度, 因此对全空间积分应等于 1 (波函数的归一化):

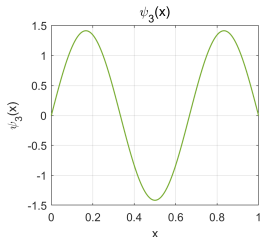
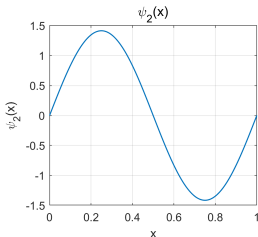
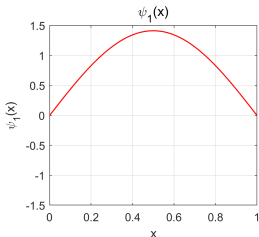
$$\int_0^a |\psi|^2 dx = \int_0^a A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = A^2 \frac{a}{2} = 1 \rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

结果分析

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

- ψ_1 具有最低的能量, 称为**基态**; 其他态的能量正比于 n^2 增加, 称为**激发态**
- $\{\psi_n(x)\}$ 构成正交完备的函数族
 - 正交性: $m \neq n$ 时, 有 $\int \psi_m^*(x) \psi_n(x) dx = 0$
 - 完备性: 任意一个函数 $f(x)$ 可被其展开

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$



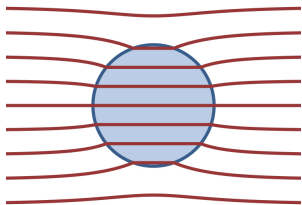
- ψ_n 相对于势阱中心是奇偶交替的, ψ_1 是偶函数, ψ_2 是奇函数, ψ_3 是偶函数, 依此类推
- 随着能量增加, 态的节点 (与 x 轴的交点) 逐渐增加. 若不计入端点, 则 ψ_1 为 0 个, ψ_2 为 1 个, ψ_3 为 2 个, 依此类推

最终含时 Schrödinger 方程的解为:

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \exp\left(-\frac{in^2\pi^2\hbar}{2ma^2}t\right)$$

匀强电场中的介质球

匀强电场 $\mathbf{E}$ 中放入一个半径为 R 、介电常数为 ε 的介质球，求空间电势 φ 分布。



分析物理情景: 由于介质球的极化，球面会出现极化电荷；球内外均无电荷分布，因此电势在除了球面的区域满足 Laplace 方程：

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

且问题具有轴对称性，因此与 ϕ 无关

$$r > R, \varphi_1(r, \theta) = \sum_l \left(a_l^+ r^l + a_l^- \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

$$r < R, \varphi_2(r, \theta) = \sum_l \left(b_l^+ r^l + b_l^- \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

边界条件

- ① 当 $r \rightarrow \infty$ 时, 可忽略介质球的影响, 即 $\varphi_1|_{r \rightarrow \infty} = -Er \cos \theta$, 因此 $a_1^+ = -E, a_l^+ = 0 (l \neq 1)$

$$\varphi_1(r, \theta) = -Er \cos \theta + \sum_l a_l^- \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

- ② 当 $r = 0$ 时 φ_2 有限, 因此 $b_l^- = 0$

$$\varphi_2(r, \theta) = \sum_l b_l^+ r^l P_l(\cos \theta)$$

衔接条件 (边值关系)

- ① 电势在界面上连续, 即 $\varphi_1|_{r=R} = \varphi_2|_{r=R}$

$$-ER \cos \theta + \sum_l a_l^- \frac{1}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) = \sum_l b_l^+ R^l P_l(\cos \theta)$$

- ② 界面无自由电荷, 则 $\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=R} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R}$

$$\varepsilon_0 \left[-E \cos \theta - \sum_l a_l^- (l+1) \frac{1}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta) \right] = \varepsilon \sum_l b_l^+ l R^{l-1} P_l(\cos \theta)$$

比较 $P_l(\cos \theta)$ 的系数

- $l=0$ 时, $\frac{a_0^-}{R} = b_0^+$, $-\varepsilon_0 a_0^- \frac{1}{R^2} = \varepsilon \times 0 \rightarrow a_0^- = b_0^+ = 0$
- $l=1$ 时, $-ER + a_1^- \frac{1}{R^2} = b_1^+ R$, $-\varepsilon_0 \left(E + 2a_1^- \frac{1}{R^3} \right) = \varepsilon b_1^+$

$$a_1^- = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} ER^3, \quad b_1^+ = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E$$

- $l > 1$ 时, $\frac{a_l^-}{R^{l+1}} = b_l^+ R^l$, $-\varepsilon_0 a_l^- (l+1) \frac{1}{R^{l+2}} = \varepsilon b_l^+ l R^{l-1}$

$$a_l^- = b_l^+ = 0$$

$$\varphi_1(r, \theta) = -Er \cos \theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} ER^3 \frac{1}{r^2} \cos \theta$$

$$\varphi_2(r, \theta) = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} Er \cos \theta$$

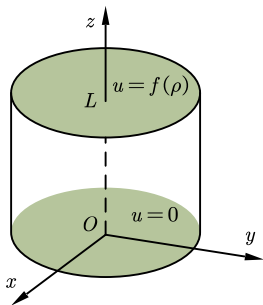
进一步可计算介质球内的电场强度：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 = -\nabla \varphi_2 &= -\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \right) \\ &= \frac{3\varepsilon_0 E}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} (\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta) = \frac{3\varepsilon_0 \mathbf{E}}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \end{aligned}$$

因此介质球内为匀强电场. 且由于 $\varepsilon > \varepsilon_0$, 故 $|\mathbf{E}_2| < |\mathbf{E}|$, 说明极化电荷产生的电场削弱外电场 (退极化场).

柱体的稳定分布问题

空间中一柱体具有稳定的温度分布, 柱的侧面绝热. $z=0$ 时, $u=0$; $z=L$ 时, $u=f(\rho)$. 试求解柱的温度分布.



定解问题为:

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = 0 \\ u(z=0) = 0, u(z=L) = f(\rho) \\ u \text{ 有限} \end{cases}$$

ρ 具有齐次边界条件. 此时问题具有轴对称性, 因此解应与 ϕ 无关, $m=0$; 又 u 有限, 因此解中不应出现 $\ln \rho$ 和 Neumann 函数

写出解的一般形式为:

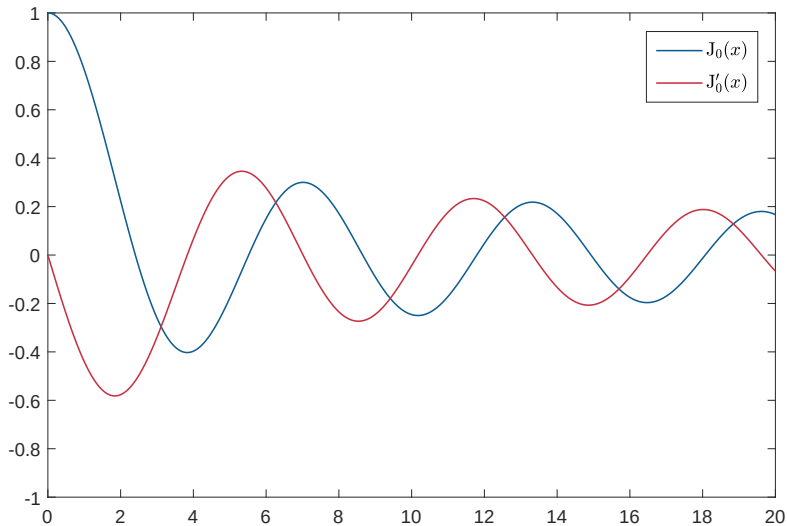
$$u = A_0 + B_0 z + \sum [A_n \exp(\sqrt{\mu} z) + B_n \exp(-\sqrt{\mu} z)] J_0(\sqrt{\mu} \rho)$$

代入 $\left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = 0$, 得

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = \left. \frac{\partial J_0(\sqrt{\mu} \rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = 0 \longrightarrow \sqrt{\mu} a = x_n \text{ 即 } \sqrt{\mu} = \frac{x_n}{a}$$

式中 x_n 为 $J'_0(x)$ 的第 n 个零点.

$$u = A_0 + B_0 z + \sum \left[A_n \exp\left(\frac{x_n}{a} z\right) + B_n \exp\left(-\frac{x_n}{a} z\right) \right] J_0\left(\frac{x_n}{a} \rho\right)$$



代入 $u(z=0) = 0$, 得到

$$u|_{z=0} = A_0 + \sum (A_n + B_n) J_0 \left(\frac{x_n}{a} \rho \right) = 0$$

因此 $A_0 = 0, A_n + B_n = 0$.

$$\begin{aligned} u_0 &= B_0 z + \sum \left\{ A_n \left[\exp \left(\frac{x_n}{a} z \right) - \exp \left(-\frac{x_n}{a} z \right) \right] \right\} J_0 \left(\frac{x_n}{a} \rho \right) \\ &= B_0 z + 2 \sum A_n \sinh \left(\frac{x_n}{a} z \right) J_0 \left(\frac{x_n}{a} \rho \right) \end{aligned}$$

再代入 $u(z=L) = f(\rho)$, 得

$$B_0 L + 2 \sum A_n \sinh \left(\frac{x_n}{a} L \right) J_0 \left(\frac{x_n}{a} \rho \right) = f(\rho)$$

然后利用 Bessel 函数的正交关系：

$$\begin{aligned} B_0 L \int_0^a J_0\left(\frac{x_k}{a}\rho\right) \rho d\rho + 2 \sum A_n \sinh\left(\frac{x_n}{a}L\right) \int_0^a J_0\left(\frac{x_n}{a}\rho\right) J_0\left(\frac{x_k}{a}\rho\right) \rho d\rho \\ = \int_0^a f(\rho) J_0\left(\frac{x_k}{a}\rho\right) \rho d\rho \end{aligned}$$

$k = 0$ 时, $x_0 = 0$, 得到

$$B_0 L \int_0^a \rho d\rho = \int_0^a f(\rho) \rho d\rho \longrightarrow B_0 = \frac{\int_0^a f(\rho) \rho d\rho}{\frac{1}{2}a^2 L}$$

$k \neq 0$ 得到

$$2A_k \sinh\left(\frac{x_k}{a}L\right) \int_0^a \left[J_0\left(\frac{x_k}{a}\rho\right)\right]^2 \rho d\rho = \int_0^a f(\rho) J_0\left(\frac{x_k}{a}\rho\right) \rho d\rho$$

因此

$$A_k = \frac{\int_0^a f(\rho) J_0\left(\frac{x_k}{a}\rho\right) \rho d\rho}{2 \sinh\left(\frac{x_k}{a}L\right) \int_0^a \left[J_0\left(\frac{x_k}{a}\rho\right)\right]^2 \rho d\rho}$$

思考一个问题 在讲 Bessel 函数的正交关系时, 我们说 $x_{n,k}$ 是 J_n 的第 k 个零点. 在我们刚刚的分析中, 分析的是 J_0 的正交关系, 但是 x_n 却是 $J'_0(x)$ 的第 n 个零点. 这正确吗?

如上所述, 统一用 $x_n^{(m)}$ 表示 $J_m(x)$ ($m=0,1,\dots$) 的第 n 个正的零点. 而 $x_n^{(m,\sigma)}$ 、 $\mu_n^{(m,\sigma)}$ ($\sigma=1,2,3$) 分别表示 $J_m(x)$ 或 $J_m(\sqrt{\mu}\rho)$ 在圆柱侧面常见的三类齐次边界条件下的第 n 个正根或本征值. 如果不指明边界条件的种类, 则本征值记为 $\mu_n^{(m)}$ 或 μ_n .

(二) 贝塞尔函数的正交关系

作为施图姆-刘维尔本征值问题的正交关系(9.4.12)的特例, 对应于不同本征值的同阶贝塞尔函数在区间 $[0, \rho_0]$ 上带权重 ρ 正交,

$$\int_0^{\rho_0} J_m(\sqrt{\mu_n}\rho) J_m(\sqrt{\mu_l}\rho) \rho d\rho = 0. \quad (n \neq l) \quad (11.2.8)$$

事实上 Bessel 函数存在递推关系 $\frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_{\nu}(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$.

令 $\nu = 0$, 则 $J'_0(x)$ 的零点就是 $J_1(x)$ 的零点

```
In[17]= Integrate[BesselJ[0, BesselJZero[1, 2] * x] * x, {x, 0, 1}]
          积分          第一类贝... 贝塞尔函数零点
```

```
Out[17]= 0
```

```
In[18]= Integrate[BesselJ[0, BesselJZero[1, 3] * x] *
          积分          第一类贝... 贝塞尔函数零点
          BesselJ[0, BesselJZero[1, 5] * x] * x, {x, 0, 1}]
          第一类贝... 贝塞尔函数零点
```

```
Out[18]= 0
```

```
In[19]= Integrate[BesselJ[0, BesselJZero[1, 2] * x] *
          积分          第一类贝... 贝塞尔函数零点
          BesselJ[0, BesselJZero[1, 7] * x] * x, {x, 0, 1}]
          第一类贝... 贝塞尔函数零点
```

```
Out[19]= 0
```

Thank you!