

6. 15 高数考前复习

一. 向量代数与空间解析几何

1. 基础知识点过关

1. 向量运算基本知识: (1) 投影运算: $Prj_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cos < \vec{a}, \vec{b} >$

(2) 方向余弦: 对于向量 $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, 三个方向余弦分别为 $\cos \alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{OM}|}$, $\cos \beta = \frac{y}{|\overrightarrow{OM}|}$, $\cos \gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{OM}|}$, 方向余弦的性质为 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 且 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 表示与 $\overrightarrow{OM}$ 同向的单位向量.

(3) 设 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, 则数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos < \vec{a}, \vec{b} > = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$,

向量积 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin < \vec{a}, \vec{b} >$.

如果有 $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, 则混合积 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

2. 平面方程：点法式、三点式、一般式、截距式（最重要是点法式！）；由一般式 $Ax + By + Cz + D = 0$ ，可得一个法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$

直线方程：一般方程（两面交线）、点向式、参数方程（最重要是点向式！）

两平面夹角、两直线夹角、线与面的夹角，这些在高中已经学过了

平面束：设 L 由 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 确定，则 L 的平面束方程为： $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$

3. 曲面方程：旋转曲面、柱面、二次曲面 常用分析方法：截痕法、伸缩法

空间曲线方程：一般方程（两个曲面交线）、参数方程

空间曲线在坐标面的投影：①设 C 的方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ ，如果要求其在 xOy 面上的投影，则利用消元法消去

变量 z ，得到投影柱面的方程 $H(x, y) = 0$

② $\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 即表示 C 在 xOy 面上的投影曲线

简单来说，往哪个面投，就要消掉这个面之外的变量！

11. 解题方法总结

1. 对于平面一般式 $Ax + By + Cz + D = 0$ ，如果平面过原点，则 $D = 0$ ；平面平行于哪条坐标轴，哪个变量的系数就为0.

2. 快速判断曲面形状：分别令 $x = 0, y = 0, z = 0$ ，看它与各个坐标面的交线. 例如 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$ ，令 $x = 0$ ，可知其与 yOz 面的交线是直线 $z = \pm \frac{y}{b}$ ；令 $y = 0$ ，可知其与 xOz 面的交线是直线 $z = \pm \frac{x}{a}$ ，由此可判断这是一个圆锥面

3. 一些常用的操作：

- (1) 已知直线的一般方程，即两个平面相交所得，则直线的一个法向量可以由 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ 求得；
- (2) 要求的平面过一定直线，则写出直线的平面束，确定该平面的大致形式；
- (3) 要求的平面与一定直线垂直，则直线的方向向量即为该平面的一个法向量；要求的平面与一定直线平行，则由平面法向量与直线方向向量的数量积为0，可以得到一些信息
- (4) 求直线外一点到直线的垂线的方程，有很多种方法，介绍较为简单的一种：设直线方程为 l ，直线外一点 A ，先求出过点 A 且垂直于 l 的平面 π_1 (此时 l 的方向向量 $\vec{s}$ 即为 π_1 的一个法向量)，然后再求出过点 A 且过直线 l 的平面 π_2 (可以在 l 上任取一点 B ，则 $\vec{s} \times \overrightarrow{AB}$ 即为 π_2 的一个法向量)。则平面 π_1 与 π_2 的交线即为所求垂线方程.

III. 真题讲解

1. 设 $\vec{A} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{B} = \lambda\vec{a} + \vec{b}$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 若 $\vec{A} \perp \vec{B}$, 则 $\lambda =$ _____.
2. 一平面垂直于 $z = 0$, 并通过从点 $A(1, -1, 1)$ 到直线 $l_1: \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 的垂线 l , 求此平面方程.
3. 求一与直线 $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$ 垂直且与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 相切的平面方程.

二. 多元函数微分学

1. 基础知识点过关

1. 二重极限: $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$. 要求是**以任意方式**逼近 (x_0, y_0) 时, 极限值都相同

连续性: $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

2. 偏导数: (1) 定义: $f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$, $f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$

高阶偏导: 由于 f_x, f_y 仍然是关于 x, y 的二元函数, 因此可以再次求偏导

克莱罗定理: 如果 $f(x, y)$ 的两个二阶偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 在区域 D 内连续, 则有 **$f_{xy} = f_{yx}$**

3. 全微分: 如果 $f(x, y)$ 在某点的全增量可表示为 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称 $f(x, y)$ 在该点可微.

(1) 判定可微: 在 (x_0, y_0) 有 **$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - A\Delta x - B\Delta y}{\rho} = 0$** , 则可微

(2) 必要条件: 在 (x_0, y_0) 可微, 则偏导必存在, 且 **$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$** .

(3) 充分条件: 在 (x_0, y_0) 的某邻域内偏导存在, 且偏导在该点连续, 则可微

4. 多元复合函数求导：画树状图可以解决绝大部分的问题！

5. 隐函数求导：(1) 一个方程的情形：一句话总结——“倒过来，添负号”

由 $F(x, y) = 0$ 可确定 $y = f(x)$ ，且 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$

由 $F(x, y, z)$ 可确定 $z = f(x, y)$ ，且 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$

(2) 方程组的情形：设 $F(x, y, z), G(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某邻域内有连续偏导，又 $F(x_0, y_0, z_0) = G(x_0, y_0, z_0) =$

0，且 Jacobi 行列式 $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}$ 在 (x_0, y_0, z_0) 不等于 0，则有 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}$

→ 拓展至更多个变量：设 $F(x, y, u, v), G(x, y, u, v)$ 在点 (x_0, y_0, u_0, v_0) 的某邻域内有连续偏导数，又

$F(x_0, y_0, u_0, v_0) = G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ ，且 Jacobi 行列式 $J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$ 在 (x_0, y_0, u_0, v_0) 不等于 0，则 $\frac{\partial u}{\partial x} =$

$$-\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}, \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}$$

6. 向量值函数：自变量确定后，得到的因变量是一个向量。因此，对向量值函数的极限和求导，其实就是对向量各个分量的极限和求导。

7. 空间曲线的切线和法平面：

① 设 C 由参数方程 $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$ 确定，则在由 t_0 确定的点 (x_0, y_0, z_0) 处，切向量 $T = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$ ，然后由直线的点向式和平面的点法式即可得切线与法平面方程。

② 如果 C 由 $y = \varphi(x), z = \psi(x)$ 确定，则把 x 看作参数，得参数方程 $x = x, y = \varphi(x), z = \psi(x)$ ，就变成了第一种情形

③ 如果 C 由隐式 $F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$ 确定，可以通过之前在讲隐函数求导中方程组情形的方法，来求出 y'_x, z'_x

曲面的切平面与法线：

① 若曲面 π 由隐式 $F(x, y, z) = 0$ 确定，则在 (x_0, y_0, z_0) 处，法向量为 $(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$ ，然后由直线的点向式和平面的点法式即可得法线与切平面。

② 若曲面 π 由显式 $z = f(x, y)$ 确定，则令 $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ ，就变成了第一种情形

8. 梯度: $\text{grad } f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$

方向导数: 设研究方向 $\vec{l}$ 的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta$, 则 $\frac{\partial f}{\partial l} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta$

因此, $\frac{\partial f}{\partial l} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta) = \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \vec{e}_l = |\text{grad } f(x_0, y_0)| \cos \theta$

通过上式, 我们看到, 梯度的模就是方向导数的最大值, 梯度指向函数增长最快的方向

9. 多元函数极值:

①必要条件: 极值 $\rightarrow f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. (偏可导的极值点必为驻点)

充分条件: 设 (x_0, y_0) 为驻点, 令 $A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$, 则:

(1) $AC - B^2 > 0 \rightarrow$ 有极值, 且 $A < 0$ 为极大, $A > 0$ 为极小

(2) $AC - B^2 < 0 \rightarrow$ 无极值 (3) $AC - B^2 = 0 \rightarrow$ 无法判断

②可能的极值点: 驻点、偏导不存在的点

可能的最值点: 驻点、偏导不存在的点、区域端点

③条件极值——Lagrange乘数法: 设目标函数 $F(x, y, z)$, 约束条件为 $G(x, y, z) = 0$, 我们构造 $L(x, y, z, \lambda) = F(x, y, z) + \lambda G(x, y, z)$, 然后由 $L_x = L_y = L_z = L_\lambda = 0$, 解这个方程组, 便得到可能的极值点

11. 解题方法总结

1. 证明二重极限不存在：由于二重极限要求逼近方式的任意性，因此我们可以做变量替换 $y = kx$ ，转化为一元极限，看 k 取不同值时极限值是否相同

求二重极限：需要综合运用所有高数上求一元函数极限的方法，如洛必达、重要极限、等价无穷小量替换等；在做题时，如果有变量趋近无穷，我们最好作变量代换，让所有变量都趋近于0，这样有利于我们的分析。

2. 偏可导、全可微、连续的关系：在二元函数的分析中，由于定义域由一条线拓展成了一个区域，我们必须要建立“全”和“偏”的观念。偏可导代表了“偏”，全可微代表了“全”，连续则比较中立。“全”可以推出“偏”，但是不可以以“偏”概“全”。

全可微 $\rightarrow$ 偏可导、连续；偏可导不能推出连续和全可微；偏导存在且连续 $\rightarrow$ 全可微

3. 如何记忆隐函数求导的方程组情形？：首先，联想一下线代中，如果要解 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 这个线性方程组，

我们写出系数行列式 $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ，然后由Cramer法则，我们有 $x_1 = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $x_2 = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

反观我们的Jacobi行列式，它其实就**相当于系数行列式**，然后由Cramer法则类似的思路，**依次替换行列式中的列**，我们就得到了公式

4. 隐函数求导两种更简洁的方法：**隐函数显化、偏导方程组法**（**一般不用Jacobi，而是用这两种！**）

以下面这个例题来分别说明这两种方法：

设 $xu - yv = 0, yu + xv = 1$ ，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 。

5. 求空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面与法线时，我们发现最重要的就是**求特征向量**（曲线就是切向量，曲面就是法向量），而且特征向量的求法很一致：都是**在 x, y, z 三个分量上分别求导**。

III. 真题讲解

1. 计算二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} x + y + (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

(1) 问 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 处是否连续?

(2) 问 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 的偏导数是否存在?

(3) 问 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 处是否可微?

3. 设 $z = F(x + z, x + y)$, 求方程所确定的隐函数的偏导数 z_x, z_y .

4. 论证方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{z^2}{2} \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, 2)$ 的邻域内能确定一个可导的隐函数，并求该隐函数的导数.

5. 抛物面 $z = 3x^2 + 2y^2$ 在点 $(2, -1, 14)$ 处的切平面的方程为_____.

6. 若函数 $f(x, y) = xe^{2y}$ ，则它在点 $(2, 0)$ 处沿着从点 $(2, 0)$ 到点 $(3, 1)$ 的方向导数 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(2,0)} =$ _____.

7. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (a > 0, b > 0, c > 0)$ 的切平面，使切平面与三个坐标面围成的四面体体积最小，求切点坐标.

三. 多元函数积分学

1. 基础知识点过关

1. 二重积分: (1) 定义: $\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)$

(2) 一些重要性质: $\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma;$

$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma; m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma;$

二重积分中值定理: 设 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\exists (\xi, \eta) \in D, s. t. \iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma.$

(3) 直角坐标计算: $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$

(4) 极坐标计算: $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$

2. 三重积分：(1) 定义： $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$

(2) 直角坐标计算：三次积分 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$

“先二后一” $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$

要根据题目的需求，灵活地选择积分顺序！

(3) 柱坐标计算： $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\rho \int_{z_1(\rho, \theta)}^{z_2(\rho, \theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho dz.$

(4) 球坐标计算： $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr$

3. 求曲面的面积：设曲面由方程 $z = f(x, y)$ 给出， D 为其在 xOy 面上的投影区域，则面积 $S =$

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

4. 曲线积分：(1) 第一类曲线积分：设 $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

(2) 第二类曲线积分：设 $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, t 从 α 到 β 时, 曲线从起点 A 到终点 B , 则 $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\} dt$$

(3) 两类曲线积分的联系： $\int_L P dx + Q dy = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) dS$

(4) Green公式：如果闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 D 上有一阶连续偏导, 则有

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

(5) 平面上曲线积分与路径无关的条件： $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

5. 曲面积分：(1) 第一类曲面积分：设曲面由方程 $z = z(x, y)$ 给出，其在 xOy 上的投影为 D_{xy} ，则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy.$$

(2) 第二类曲面积分：对于 $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$ ，以 $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy$ 为例，如果

曲面可以表示成 $z = z(x, y)$ ，取上侧为正侧，则 $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dxdy$

要特别注意，曲面的取向会对结果的正负造成影响！

(3) 两类曲面积分的联系： $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy =$

$$\iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

(4) Gauss公式：空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 围成，则

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

(5) Stokes公式： Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线， Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面， Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则，则

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

11. 解题方法总结

1. 记不住公式？Nabla算子一站式解决！

(1) Nabla算子： $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ ，它是一个形式上的 n 维向量，其维度取决于其作用的函数。一般我们分

析三元函数，则 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$

(2) 数量场：函数值是一个数 向量场：函数值是一个向量

(3) ∇ 作用于数量场 $f(x, y, z)$ ：我们已经提到，把 ∇ 看成一个向量，而 f 又是数量场，因此可以看成一个数乘一个向量，即有 $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ ，这个结果叫做 f 的**梯度向量**。

(4) ∇ 作用于向量场 $F(x, y, z)$ ：设 F 的三个分量函数依次为 P, Q, R 。当 ∇ 点乘 F 时，有 $\nabla \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ ，这个数

叫做 F 的**散度**；当 ∇ 叉乘 F 时，有 $\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ ，这个向量叫做 F 的**旋度**。

(5) Gauss公式:

$$\oiint_{\Sigma} F \cdot dS = \oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot F dV = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

“散度是通量的体密度”

Stokes公式:

$$\oint_L F \cdot dl = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \nabla \times F dS = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

“旋度是环量的面密度”

2. 奇偶对称性: “偶倍奇零”

(1) 对于二重积分 $I = \iint_D f(x, y) dx dy$, 如果 D 关于 y 轴对称, 则

$$f \text{ 关于 } x \text{ 奇} \rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = 0; f \text{ 关于 } x \text{ 偶} \rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D^+} f(x, y) dx dy$$

对 y 的奇偶性亦然

(2) 对于三重积分: $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$, 如果 Ω 关于 xOy 面对称, 则

$$f \text{ 关于 } z \text{ 奇} \rightarrow \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0; f \text{ 关于 } z \text{ 偶} \rightarrow \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 2 \iiint_{\Omega^+} f(x, y, z) dx dy dz$$

3. 轮换对称性: (1) 什么样的图形具有轮换对称性? 如果任意交换方程中的两个变量后, 方程的形式保持不变, 我们就说这个图形具有轮换对称性, 如: $x + y + z = 1$; $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

(2) 对于重积分, 线面积分而言, 一旦积分区域具有轮换对称性, 我们就可以通过替换积分中的变量, 来起到简化运算的作用

4. “挖洞”后用Green: 我们知道, 如果要对一个闭合曲线积分使用Green公式, 那么 P 和 Q 必须在 D 上有一阶连续偏导。一旦 D 中有点不满足这个条件, 我们就不能直接用公式, 而是应该先挖去一块包含这个点的小区域 (一般取圆), 然后再用Green公式

5. “补面”后用Gauss: 如果一个曲面积分的积分曲面围成了一个开口的较为规则的区域, 我们可以用一个面将开口补上, 形成一个闭合曲面, 然后再用Gauss公式。补面时要特别注意正侧的选取

III. 真题讲解

1. 二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 (\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}) dx =$ _____.

2. 设空间曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases} (a > 0)$, 则曲线积分 $\oint_{\Gamma} y^2 ds =$ _____.

3. 计算 $\iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz$, 其中 Ω 是由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0$ 所确定的闭区域.

4. 设 L 为逆时针取向的圆周 $x^2 + y^2 = R^2 (R > 0)$, 则 $\oint_L \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} =$ _____.

5. 计算 $\oint_L \frac{y dx - x dy}{2(x^2 + y^2)}$, 其中 $L: (x - 1)^2 + y^2 = 2$, 其方向为顺时针方向.

6. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x - y) dy dz + (y - z) dz dx + (z - x) dx dy$, 其中 Σ 是抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 1$ 截下部分的下侧.

7. 计算 $\iint_{\Sigma} 2(1 - x^2) dy dz + 8xy dz dx - 4xz dx dy$, 其中 Σ 是由曲线 $x = e^y (0 \leq y \leq a)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面的外侧.

四. 常微分方程

1. 基础知识点过关

1. 可分离变量：如果一阶微分方程可以写成 $g(y)dy = f(x)dx$ ，则直接对两边积分即可得到通解. 这是最简单的情形

2. 齐次方程：形如 $\frac{dy}{dx} = \varphi(\frac{y}{x})$ 的方程称为齐次方程. 此时我们令 $u = \frac{y}{x}$ ，则 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ ，代入原方程便有 $u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u)$ ，化为了可分离变量的形式.

3. 一阶线性微分方程：形如 $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$

通解公式： $y = e^{-\int P(x)dx} [\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C]$

4. 伯努利方程：形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$. 此时两边同除以 y^n ，得 $y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$ ；然后再令 $z = y^{1-n}$ ，则 $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$ ，代入原方程得 $\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$ ，化为了我们熟悉的一阶线性方程.

5. 全微分方程：(1) 形如 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 的方程，且方程的左边恰好是某个二元函数 $u = u(x, y)$ 的全微分

(2) 判断标准：由克莱罗定理，必有 $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$

(3) 通解： $\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = C$ ，而且一般我们取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ；又 $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ ，故该曲线积分与路径无关，我们便可以[选择与坐标轴平行的折线进行积分](#)。

6. 几种可降阶的高阶微分方程：

(1) $y^{(n)} = f(x)$ ：积一次分得到 $y^{(n-1)}$ ，积两次得到 $y^{(n-2)}$ ，以此类推，我们只需要[经过 \$n\$ 次积分](#)，便可得到通解。

(2) $y'' = f(x, y')$ ：令 $P = y'$ ，则原方程化为 $P' = f(x, P)$ 为一阶，求出 P 后，对其积分即得 y

(3) $y'' = f(y, y')$ ：依然令 $P = y'$ ，则 $y'' = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = P \cdot \frac{dP}{dy}$ ，则原方程化为 $P \cdot \frac{dP}{dy} = f(y, P)$ 为一阶，求出 P 后，对其积分即得 y 。

7. 高阶线性微分方程（以二阶为例）：(1) 对于 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ ，如果 y_1, y_2 是其两个线性无关的解，则 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 即为其通解；

(2) 对于 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ ，如果 y^* 是其一个特解， Y 是其对应齐次方程的通解，则原方程的通解为 $y = Y + y^*$

(3) 叠加原理：对于 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ ，如果 y_1^* 是 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$ 的特解， y_2^* 是 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$ 的特解，则 $y_1^* + y_2^*$ 是原方程的特解

(4) Liouville公式：对于 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ ，如果已知 y_1 是其一个非零特解，则另一个线性无关的特解

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx$$

8. 二阶常系数齐次线性微分方程：形如 $y'' + py' + qy = 0$ ，其中 p, q 为常数

求解：写出其特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ ，求解 r ，有以下几种情形

(1) 有互异实根 $r_1, r_2 \rightarrow$ 通解为 $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

(2) 有二重根 $r \rightarrow$ 通解为 $y = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx}$

(3) 有共轭复根 $\alpha \pm \beta i \rightarrow$ 通解为 $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

9. 二阶常系数非齐次线性微分方程：形如 $y'' + py' + qy = f(x)$ ，由前面对解的结构分析我们知道，该方程的通解等于一个特解加对应齐次方程的通解。齐次方程的通解我们已经会求解，下面给出特解的求法：

(1) $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型：设特解为 $y^* = e^{\lambda x} \cdot x^k \cdot Q_m(x)$

且 λ 不是特征根 $\rightarrow k = 0$ ； λ 是单特征根 $\rightarrow k = 1$ ； λ 是二重特征根 $\rightarrow k = 2$ 。

(2) $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$ 型：设特解为 $y^* = e^{\lambda x} \cdot x^k \cdot [Q_1(x) \cos \omega x + Q_2(x) \sin \omega x]$

Q_1, Q_2 均为 m 次多项式，且 $m = \max\{l, n\}$

$\lambda \pm \omega i$ 不是特征根 $\rightarrow k = 0$ ； $\lambda \pm \omega i$ 是特征根 $\rightarrow k = 1$

11. 解题方法总结

1. 这一章绝大部分的题目，基本上套公式就可以解决，所以一定要将公式牢记于心！

2. 二阶线性微分方程的求解(很少考)：对于 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ ，对应的齐次方程为 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ ，只有在知道齐次方程的一个特解 y_1 的情况下，才可求解.

(1) 利用Liouville公式，得到齐次方程另一个特解 y_2 ，由此得到齐次方程的通解 $Y = C_1y_1 + C_2y_2$

(2) 然后用常数变易法，设原方程的一个特解 $y^* = u_1y_1 + u_2y_2$ ，然后由方程组
$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$
求出 u_1, u_2

(3) 由解的结构，使得原方程通解为 $y = C_1y_1 + C_2y_2 + y^*$

III. 真题讲解

1. $xy'' + 2y' = 1$ 满足 $y(1) = 2y'(1)$, 求该方程当 x 趋近于 0 时, y 有界的特解.
2. 求方程 $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 - 3x^2y)dy = 0$ 的通解.
3. 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = e^{-x} + 3x + 1$ 的通解.