

理论力学

Lecture 1. 最小作用量原理

傅林

Central South University
物理学院

2025.1

目录

- 1 速度相空间
- 2 约束与自由度
- 3 泛函与变分
- 4 最小作用量原理
- 5 习题课

目录

- 1 速度相空间
- 2 约束与自由度
- 3 泛函与变分
- 4 最小作用量原理
- 5 习题课

位形空间

力学的基本问题, 是研究力学系统的**位形**(configuration) 随时间的演化.

位形

指力学系统中各质点的空间位置, 描述了系统中各点的空间分布. 例如, 对于 N 个质点构成的质点系, 给出 N 个质点的位矢

$$\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N\}$$

即给出了质点系的一个位形.

系统所有可能位形的集合, 便构成**位形空间**. 位形空间中的一点, 即代表系统的一种可能位形.

* 要注意的是, 位形空间一般都不是平直的线性空间, 数学上用流形 (manifold) 这一概念来描述这种弯曲的空间.

速度相空间

思考 确定了系统的位形, 是否就唯一确定了系统的状态?

位置相同, 可以有不同的速度; 速度不同, 会导致下一时刻的位置不同. 因此系统当前位形无法决定以后的位形. 但如果位形和速度都确定了, 我们就能推知下一时刻的位形和速度.

速度相空间

位形和速度构成的状态空间, 称为速度相空间. 对于 N 个质点组成的质点系, 给出每个质点的位矢和速度

$$\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_N; \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \cdots, \dot{\mathbf{r}}_N\}$$

即给出了质点系的一个状态.

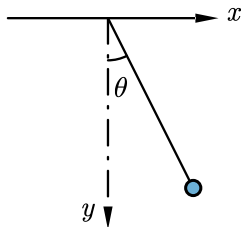
拉格朗日力学是速度相空间中的力学!

广义坐标

要描述三维空间中某一点的位置, 我们有下面的一些方案:

直角坐标 (x, y, z) 、球坐标 (r, θ, ϕ) 、柱坐标 (r, ϕ, z)

坐标的本质, 其实就是对某种空间的参数化. 任何一组能够唯一确定系统位形的独立参量都可以成为坐标, 称为**广义坐标**.



以一个在二维平面中运动的单摆为例.
要确定摆球的位置, 可以选择的广义坐标有:

- 摆角 θ
- 横坐标 x

纵坐标 y 能否充当广义坐标?

* 一个力学系统究竟需要几个广义坐标, 才能完整描述其位形?

目录

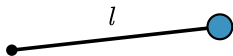
- 1 速度相空间
- 2 约束与自由度
- 3 泛函与变分
- 4 最小作用量原理
- 5 习题课

约束及其分类

所谓约束 (constraint), 即为对系统所能达到的状态所强加的运动学限制条件. 约束的存在, 表明速度相空间中有些地方无法到达, 实际能够到达的只是其某个子空间.

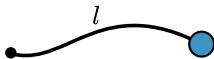
按照质点能否脱离约束, 可分为可解约束与不可解约束.

用杆连接的小球



$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

用绳连接的小球



$$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2$$

不可解约束的表达式应是一个等式：

$$f(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_n; \dot{\mathbf{r}}_1, \cdots, \dot{\mathbf{r}}_n; t) = 0$$

可解约束则为不等式：

$$f(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_n; \dot{\mathbf{r}}_1, \cdots, \dot{\mathbf{r}}_n; t) \leq 0$$

显然等式比不等式要好分析，因此我们主要讨论不可解约束。进一步，如果仅仅对系统的位形进行约束，称为几何约束：

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots, \mathbf{r}_n; t) = 0$$

如果同时约束了位形与速度，则称为微分约束。

有一个很大的问题：**约束位形必然约束速度！**

例如将三维空间中的质点约束在 xOy 平面上, 看上去仅约束了位形, 但实际上质点的速度也只能位于 xOy 平面, 不可能有 z 方向的分量. 为了说明问题, 将几何约束表达式 $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n; t) = 0$ 对时间求导:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i = 0$$

求导后式中出现了速度. 因此**几何约束可以通过求导变成微分约束**.

那微分约束是否一定可以通过积分变为几何约束?

- 可积分的微分约束: 如 $\dot{x} - \dot{y} = 0$, 积分后得到 $x - y = C$
- 不可积分的微分约束: 如 $\dot{x} - \dot{y}z = 0$, 左右同乘 dt 得到 $dx - zd y = 0$. 如果要将其积出来, 必须知道 z 随 y 的变化 $z(y)$, 但在求解运动之前这显然是无法知道的.

几何约束加上可积分的微分约束又称为**完整约束**, 其余称为不完整约束.

按照约束表达式是否含时, 又可分为定常/非定常约束. 定常约束 (稳定约束) 是不显含时间的约束

$$f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n; \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n) = 0$$

反之则是非定常约束 (不稳定约束).

自由度

定义

确定一个系统运动状态所必须的、独立变化的物理量个数.

对于完整约束系统, **广义坐标的个数等于系统的自由度.**

约束能够减少系统的自由度. 更具体地, 一个约束能减少一个自由度. 以二维平面上的自由质点为例, 其自由度为 2, 意味着需要两个坐标才能完整描述其位形 (直角坐标、极坐标). 但如果加一个约束, 比方说将其束缚在一根绳上构成一个单摆, 则自由度变为 1, 只需要一个坐标.

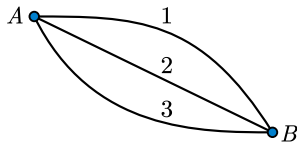
在分析力学问题时, 搞清楚约束, 确定系统的自由度往往是第一步, 也是极为关键的一步.

目录

- 1 速度相空间
- 2 约束与自由度
- 3 泛函与变分
- 4 最小作用量原理
- 5 习题课

最速降线问题

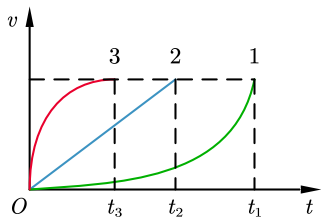
1696 年约翰·伯努利在写给他哥哥雅克布·伯努利的一封公开信中，提出了著名的最速降线问题。



设竖直平面内有 A, B 两点，它们不在一条竖直线上. 设计一条曲线轨道连接这两点，使得仅受重力作用且初速为零的质点沿这条轨道从 A 运动到 B 所需的时间最短.

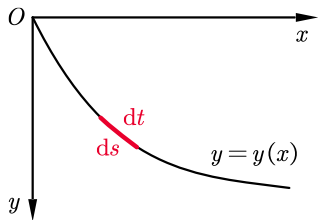
大致可以将答案分为三类：

- 直线，如图中轨道 2
- 直线上方的曲线，如图中轨道 1
- 直线下方的曲线，如图中轨道 3



- 1号: 加速度越来越大
 - 2号: 匀加速
 - 3号: 加速度越来越小
- 显然 3 号所需时间较短.

通过定性分析, 可知最终答案应是直线下方的某一曲线. 下面我们尝试从动力学方法求该曲线.



$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx, v = \sqrt{2gy}$$

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{\sqrt{2gy}}$$

$$t = \int dt = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{\sqrt{2gy}}$$

泛函与变分

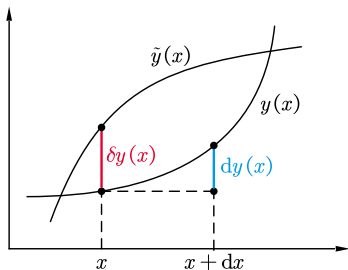
将前面得到的无法计算的积分一般化, 变成下面的形式:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

这一数学对象被称为**泛函**(functional). 它就像一台数学机器, **输入一个函数, 返回一个数**(映射).

- 空间中两点用任意曲线连接, 曲线的长度即为曲线形状的泛函.
- 对平面内的封闭曲线, 其包围的面积即为曲线形状的泛函.

研究泛函的极值问题, 便是所谓**变分问题**.



- 微分: 对函数 $y(x)$, 自变量 x 发生极小的变化 dx , 所带来的函数值的变化 $dy(x)$
- 变分: 对于泛函 J , 输入的函数 $y(x)$ 发生一个极小变化 $\delta y(x)$, 导致泛函 J 的值发生的变化 δJ

关于变分, 有下面一些运算性质:

- ① x 的变分应为 0. $\delta x \equiv 0$
- ② 在积分端点 (边界) 处函数的变分为 0. $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$
- ③ 变分与求导可交换次序, 即导数的变分 = 变分的导数

$$\delta \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta y)$$

Euler-Lagrange 方程

函数取极值, 在极值点处应有 $dy(x) = 0$; 类似地, 泛函取极值应有 $\delta J = 0$.

假设 $y(x)$ 受到一个小扰动后变为 $\tilde{y}(x)$, 泛函 J 的值变为:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[F(x, y, y') + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx$$

因此 J 的变分为

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{x_1}^{x_2} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx \\&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) \right] dx \\&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right) - \delta y \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx \\&= \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta y \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx \\&= \int_{x_1}^{x_2} \delta y \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] dx\end{aligned}$$

Euler-Lagrange 方程

泛函取极值的必要条件为

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

请务必将这个方程记住!

目录

- 1 速度相空间
- 2 约束与自由度
- 3 泛函与变分
- 4 最小作用量原理**
- 5 习题课

最小作用量原理

定义力学体系的作用量(action)为：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_\alpha, \dot{q}_\alpha) dt$$

其中 $L(t, q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$ 称为体系的拉格朗日量(Lagrangian)，它是广义坐标 q_α 、广义速度 $\dot{q}_\alpha$ 和时间 t 的函数。

最小作用量原理

经典力学体系在时刻 t_1 和 t_2 之间的真实运动轨迹使得该体系的作用量 S 取极值。

最小作用量原理甚至可视为整个物理学的第一原理，大自然总是倾向于让某些基本的物理量取最小值。

Euler-Lagrange 方程

作用量取极值的条件为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

Euler-Lagrange 方程即为拉格朗日力学中的运动微分方程，具有核心地位。在之后，分析力学问题的基本步骤为：

- 1 确定自由度，选择合适的广义坐标
- 2 写出系统的拉氏量 L
- 3 代入 Euler-Lagrange 方程，便得到系统的运动学方程

至于如何写出系统的拉氏量，将在 Lecture 2 详细讲解。

一些理解

考虑一个平抛运动, 假设质点在 xOz 平面内运动, 牛顿力学的求解方式为:

- 写出运动方程

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg$$

- 给定初始条件

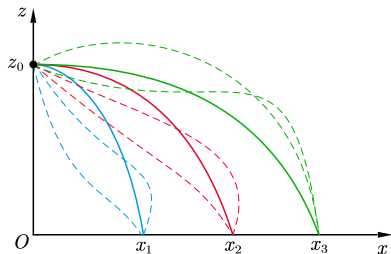
$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = 0$$

- 求解运动

$$x(t) = v_0 t, \quad z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

现在假设有一个叫哈密顿的人,对牛顿力学一无所知,他只是不停地做实验.经过多次实验,他发现了如下规律:

- 只要出射高度相同,那么落地的时间就相同
- 以不同水平速度出射,小球落地点的水平位置不同
- 小球的运动轨迹和落地点的位置是一一对应的,也就是说不可能抛出两条不同的轨迹,却有着相同的落地点



如图所示,实线是我们所能真正观察到的轨迹,而虚线从来没有出现过.

它们明明具有相同的端点,为什么偏偏只有实线能够发生呢?

哈密顿便猜测：大自然一定存在某种法则，给每条轨迹一个“指标”，只有这个指标取特殊值时对应的运动才能发生。

现在我们知道：这个指标就叫做作用量，这个法则便是最小作用量原理。

- 牛顿力学：局域的、微分的。如果知道某一时刻的位置与速度，运动微分方程就决定了下一时刻的位置与速度。
- 最小作用量原理：将所有可能的运动状态都交给大自然筛选，大自然会自动筛选出作用量最小的那一种运动情形。

目录

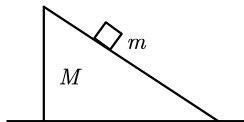
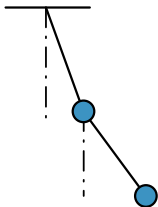
- 1 速度相空间
- 2 约束与自由度
- 3 泛函与变分
- 4 最小作用量原理
- 5 习题课

例题 1

判断下面情形中，力学体系的自由度，并选择合适的广义坐标。

(1) 平面双摆；

(2) 光滑水平面上，放置一质量为 M 的楔块，另一质量为 m 的物体沿楔块斜面下滑。



例题 2

利用 Euler-Lagrange 方程, 求平面上给定两点之间的最短路径.