理论力学

Lecture 3. 守恒与对称

傅林

Central South University
物理学院

2025.2

目录

1. 运动积分
2. 广义动量守恒
3. 广义能量守恒
4. Noether 定理
5. 习题课

目录

1 运动积分

2 广义动量守恒

3 广义能量守恒

4 Noether 定理

5 习题课

定义

牛顿力学在处理问题时，经常需要用到各种守恒律，如能量守恒、动量守恒、角动量守恒等. 分析力学能得到这些守恒律吗？

运动积分

运动积分 (integrals of motion)，亦称首次积分或运动常数，是由 $q_\alpha, \dot{q}_\alpha$ 组成的函数

$$C = C(q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$$

其值只取决于初始条件，而在运动的过程中保持不变.

例如对于一维谐振子，其能量

$$E = E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

是一个运动积分，但 x 和 $\dot{x}$ 都是随时间而变的.

独立运动积分的数目

虽然运动积分为我们分析问题带来了极大的好处，但不是所有运动积分都是有意义的，比方说任意两个运动积分相加依然是运动积分. 我们自然想知道：一个体系最多能得到多少个独立的运动积分？

定理

对自由度为 s 的封闭系统，独立的运动积分的数目为 $2s-1$ 个.

证明 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0$$

是 s 个二阶微分方程，需要 $2s$ 个积分常数（初始条件）

$$C_1, C_2, \cdots, C_{2s}$$

才能唯一确定一组解.

记得到的解为：

$$q_\alpha = q_\alpha\left(C_1, C_2, \cdots, C_{2s}; t\right), \alpha = 1, 2, \cdots s$$
$$\dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha\left(C_1, C_2, \cdots, C_{2s}; t\right), \alpha = 1, 2, \cdots s$$

上式可视为映射：

$$2s+1\text{个参数}\left\{C_1, C_2, \cdots, C_{2s}; t\right\} \longrightarrow 2s\text{个变量}\left\{q_\alpha, \dot{q}_\alpha\right\}$$

接下来消去时间参数 t. 比方说从第一个广义坐标

$$q_1 = q_1\left(C_1, C_2, \cdots, C_{2s}; t\right)$$

中解出 t:

$$t = t\left(q_1; C_1, C_2, \cdots, C_{2s}\right)$$

代入剩下的 $2s-1$ 个变量:

$$q_2 = q_2\left(C_1, C_2, \cdots, C_{2s}; t\left(q_1; C_1, C_2, \cdots, C_{2s}\right)\right) \equiv q_2\left(q_1; C_1, C_2, \cdots, C_{2s}\right)$$

$$\vdots$$

$$q_s = q_s\left(C_1, C_2, \cdots, C_{2s}; t\left(q_1; C_1, C_2, \cdots, C_{2s}\right)\right) \equiv q_s\left(q_1; C_1, C_2, \cdots, C_{2s}\right)$$

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_1\left(C_1, C_2, \cdots, C_{2s}; t\left(q_1; C_1, C_2, \cdots, C_{2s}\right)\right) \equiv \dot{q}_1\left(q_1; C_1, C_2, \cdots, C_{2s}\right)$$

$$\vdots$$

$$\dot{q}_s = \dot{q}_s\left(C_1, C_2, \cdots, C_{2s}; t\left(q_1; C_1, C_2, \cdots, C_{2s}\right)\right) \equiv \dot{q}_s\left(q_1; C_1, C_2, \cdots, C_{2s}\right)$$

下面的任务, 是将这些积分常数 $C_1, C_2, \cdots, C_{2s}$ 用 $q_\alpha, \dot{q}_\alpha$ 表示 (运动积分). 但是有 $2s$ 个积分常数, 上面却只有 $2s-1$ 个方程, 因此必然有一个不能求出. 令其为 C_{2s}, 则可求得

$$C_i = C_i\left(q_\alpha, \dot{q}_\alpha; C_{2s}\right) \ , \ i = 1, 2, \cdots, 2s-1$$

这便是我们想要的 $2s-1$ 个运动积分. 妙处在于, 虽然 $q_\alpha, \dot{q}_\alpha$ 都随时间变化, 但是它们组合出来的这 $2s-1$ 个函数 C_i 却在运动过程中保持不变, 其数值由初始条件决定.

目录

1 运动积分

2 广义动量守恒

3 广义能量守恒

4 Noether 定理

5 习题课

循环坐标

若拉氏量 L 中不显含某广义坐标 q_α，则将其称为循环坐标. 此时显然有 $\partial L/\partial q_\alpha = 0$，由 Euler-Lagrange 方程得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = 0 \longrightarrow p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \text{const}$$

将 p_α 称为 q_α 对应的广义动量. 也就是说：

循环坐标对应的广义动量守恒.

推导熟悉的守恒律

以重力场中的粒子为例，其拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$$

可知 x 和 y 为循环坐标，因此

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = \text{const}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = \text{const}$$

这便是动量守恒定律.

以中心势场中的粒子为例，其拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$$

可知 θ 为循环坐标，因此

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{const}$$

这便是角动量守恒定律.

目录

1 运动积分

2 广义动量守恒

3 广义能量守恒

4 Noether 定理

5 习题课

能量函数

将拉氏量 $L = L(t, q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$ 对时间求导:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\dot{q}_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)\end{aligned}$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

定义能量函数

$$h \equiv \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} - L$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

也就是说

若拉氏量 L 不显含时间，则能量函数守恒.

能量函数的意义

下面的任务，是进一步探究能量函数的物理意义. 首先将拉氏量写成 $L = T - V$:

$$h = \sum_{\alpha} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - T + V = \sum_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - T + V$$

然后将动能利用广义坐标表示. 对于 N 个质点组成的系统，设质点的位矢为 $\boldsymbol{r}_i\,(i = 1, 2, \cdots, N)$，其应为广义坐标和时间的函数:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i\,(q_1, q_2, \cdots, q_s; t)$$

将其对时间求导:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha$$

这样一来，体系的动能可表示为：

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} + \sum_i m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \cdot \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \\
&\quad + \sum_i \frac{1}{2} m_i \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \cdot \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta
\end{aligned}
$$

上式分别出现了广义速度的零次、一次和二次齐次函数，记作 T_0, T_1, T_2.

齐次函数的 Euler 定理

若 $f = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 k 次齐次函数，则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf$$

利用 Euler 定理，可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha &= \sum_{\alpha} \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \\
&= 0 \cdot T_0 + 1 \cdot T_1 + 2 \cdot T_2 \\
&= T_1 + 2T_2
\end{aligned}$$

将其代入能量函数，得

$$h = T_1 + 2T_2 - (T_0 + T_1 + T_2) + V = T_2 - T_0 + V$$

如果 $\boldsymbol{r}_i$ 中不显含 t，则 $T_0 = T_1 = 0$，此时系统动能 $T = T_2$，能量函数变为

$$h = T_2 + V = T + V = E$$

这便是系统的总能量.

因此，能量函数 h 不一定是系统的总能量，只有当 $\boldsymbol{r}_i$ 中不显含 t(定常约束系统) 才是.

哈密顿量

如果我们将能量函数中的 $\partial L/\partial \dot{q}_\alpha$ 换成广义动量 p_α，则得到

$$H = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = H(q_\alpha, p_\alpha, t)$$

它称为哈密顿量(Hamiltonian). 正如拉氏量 L 是拉格朗日力学的核心，哈密顿量 H 是哈密顿力学的核心.

能量函数 h 和哈密顿量 H 本质上是一个东西，之所以用不同符号表示，是为了区分其函数依赖关系.h 是广义坐标和广义速度（速度相空间）的函数，而 H 则是广义坐标和广义动量（相空间）的函数.

目录

1 运动积分

2 广义动量守恒

3 广义能量守恒

4 Noether 定理

5 习题课

连续对称性

在数学和物理中，一般把对称性定义为某种变换下的不变性.

- 将正方形绕其中心旋转一定角度，只有当变换参数（转角）取一些离散值，如 $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 等，正方形才能保持不变.
- 而对于一个圆，绕圆心旋转任意角度，这个圆都保持不变，也就是此时变换参数可以连续取值，将这种性质称为连续对称性.

数学中描述对称性的工具为群论；特别地，描述连续对称性的理论称为Lie 理论(Lie 群、Lie 代数).

某对象在一些变换下保持不变，所有的这些变换组成的集合叫做对称群. 群论在物理学中有着不可替代的作用，如经典力学离不开伽利略群的表示，相对论离不开庞加莱群和洛伦兹群的表示，标准模型中的相互作用牵涉 $\mathrm{SU}(n)$ 等.

对称性和守恒律的对应

在物理学中，对称性和守恒律是一一对应的.

- 空间平移对称对应动量守恒：如果作用量在空间平移下保持不变，动量就守恒.
- 时间平移对称对应能量守恒：如果作用量在时间平移下保持不变，则能量守恒.
- 旋转对称对应角动量守恒：如果作用量在旋转变换下保持不变，则角动量守恒.

证明　首先是时间平移对称. 此时拉氏量将不显含时间，我们已经知道这会导致能量函数守恒. 在一定条件下，能量函数就等于系统的总能量，因此便有能量守恒.

然后证明空间平移对称. 为了简单且不失一般性, 考虑一个二维的平移. 令系统发生下面的平移:

$$x' = x + \delta x\,,\ y' = y + \delta y$$

其中 $\delta x, \delta y$ 是与时间无关的小量, 则

$$\dot{x}' = \dot{x}\,,\ \dot{y}' = \dot{y}$$

系统的拉氏量也将随着平移变为:

$$L\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right) \rightarrow L'\left(x + \delta x, y + \delta y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right)$$

将 L' 进行一阶 Taylor 展开：

$$L' = L + \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + O\left(\delta x^2\right) + O\left(\delta y^2\right)$$

空间平移对称意味着 $L' = L$，则

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

也就是说 x 和 y 都是循环坐标，得到其对应的广义动量守恒，即

$$p_x = m\dot{x} = \text{const}, p_y = m\dot{y} = \text{const}$$

最后证明旋转对称. 依然考虑二维平面上的旋转, 令系统绕 z 轴旋转一个小角度 $\delta\theta$, 则坐标变换为:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta\theta & -\sin\delta\theta \\ \sin\delta\theta & \cos\delta\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\delta\theta - y\sin\delta\theta \approx x - y\delta\theta \\ y' &= x\sin\delta\theta + y\cos\delta\theta \approx y + x\delta\theta \end{aligned}$$

系统的拉氏量 L 变为:

$$L'\left(x - y\delta\theta, y + x\delta\theta, z, \dot{x} - \dot{y}\delta\theta, \dot{y} + \dot{x}\delta\theta, \dot{z}, t\right)$$

将其进行一阶 Taylor 展开：

$$
\begin{aligned}
L' &= L + \frac{\partial L}{\partial x}(-y\delta\theta) + \frac{\partial L}{\partial y}(x\delta\theta) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(-\dot{y}\delta\theta) + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(\dot{x}\delta\theta) + O\left(\delta\theta^2\right) \\
&= L + \left[\left(x\frac{\partial L}{\partial y} - y\frac{\partial L}{\partial x}\right) + \left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta\theta + O\left(\delta\theta^2\right) \\
&= L + \left\{\left[x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right] + \left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right\}\delta\theta + O\left(\delta\theta^2\right) \\
&= L + \delta\theta \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - y\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + O\left(\delta\theta^2\right) \\
&= L + \delta\theta \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(xp_y - yp_x\right) + O\left(\delta\theta^2\right)
\end{aligned}
$$

再利用角动量的定义:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \longrightarrow J_z = xp_y - yp_x$$

因此

$$L' = L + \delta\theta \cdot \frac{\mathrm{d}J_z}{\mathrm{d}t} + O\left(\delta\theta^2\right)$$

旋转对称性要求 $L' = L$, 因此

$$\frac{\mathrm{d}J_z}{\mathrm{d}t} = 0 \longrightarrow J_z = \mathrm{const}$$

Noether 定理

Noether 定理将对称性与守恒律之间的关系，总结成了一句极其简洁而优美的话：

对于每一种连续对称性，必然存在相应的守恒量.

连续对称变换

对某一广义坐标 q_α 作如下变换：

$$q_\alpha(t) \longrightarrow Q_\alpha(s,t) \quad s \in \mathbb{R}$$

其中 s 为变换参数，应有 $Q_\alpha(0,t) = q_\alpha(t)$. 如果这个变换能让拉氏量满足：

$$\frac{\partial}{\partial s} L\left(t, Q_\alpha, \dot{Q}_\alpha\right) = 0$$

就称这个变换是连续对称的.

证明　将变换后的 L 对 s 求偏导:

$$\frac{\partial L}{\partial s}=\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s}+\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha}\frac{\partial \dot{Q}_\alpha}{\partial s}$$

然后取 $s=0$:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial L}{\partial s}\right|_{s=0}&=\left.\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s}\right|_{s=0}+\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\partial \dot{Q}_\alpha}{\partial s}\right|_{s=0}\\&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s}\right|_{s=0}+\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\partial \dot{Q}_\alpha}{\partial s}\right|_{s=0}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s}\right|_{s=0}\right)=0\end{aligned}$$

这样便得到了该连续对称性对应的守恒量.

目录

1 运动积分

2 广义动量守恒

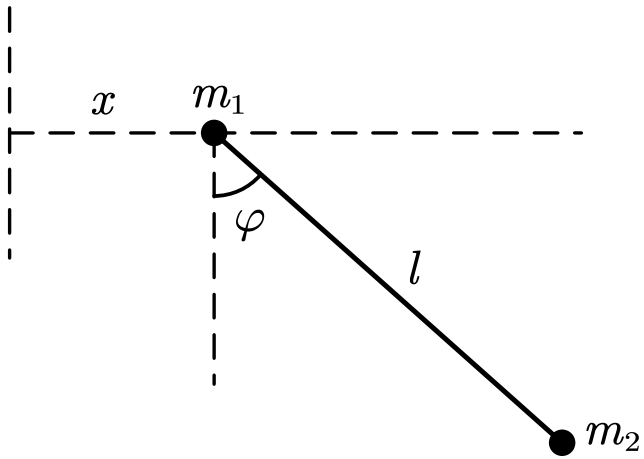
3 广义能量守恒

4 Noether 定理

5 习题课

例题 1

在下列场中运动时，动量 $\boldsymbol{p}$ 和角动量 $\boldsymbol{J}$ 的哪些分量守恒？(a) 无限大均匀平面场；(b) 无限长均匀圆柱场；(c) 无限长均匀棱柱场；(d) 两个点场；(e) 无限大均匀半平面场；(f) 均匀圆锥场；(g) 均匀圆环场；(h) 无限长均匀圆柱形螺旋线场.

例题 2

质量为 m_2 的平面摆，其悬挂点（质量为 m_1）可以沿着水平直线运动. 写出该体系的运动积分.