

理论力学

Lecture 4. 达朗贝尔原理

傅林

Central South University
物理学院

2025.2

目录

- 1 概念解释
- 2 虚功原理
- 3 利用虚功原理解决静力学问题
- 4 达朗贝尔原理
- 5 习题课

目录

- 1 概念解释
- 2 虚功原理
- 3 利用虚功原理解决静力学问题
- 4 达朗贝尔原理
- 5 习题课

虚位移

在牛顿力学中,我们第一个接触的运动学概念便是位移. 对于一个由 N 个质点组成的质点系,在 t 时刻的位形为 $\{\mathbf{r}_i\}, i = 1, 2, \dots, N$. 假设时间发生变化 dt , 各质点的位置也发生了变化 $d\mathbf{r}_i$, 那么 $d\mathbf{r}_i$ 就叫作 dt 时间段内的位移.

虚位移

虚位移 (virtual displacement) 表示假设时间不变 ($\delta t = 0$), 被约束所允许的、所有可能的、假想的位移. 记作 $\delta\mathbf{r}_i$.

实际上,所谓虚位移就是坐标的变分在达朗贝尔原理的语境中的另一个说法.

注意 虚位移的发生不需要时间 ($\delta t = 0$), 系统所受的力和约束都是 t 时刻的取值; 而实位移的发生需要时间 dt , 且力和约束可能在 dt 内发生变化.

主动力和约束力

对于一个力学体系，可以将其受力分成下面两类：

- **主动力**：与约束无关的力，记作 $\mathbf{F}$
- **约束力**：迫使系统遵守约束条件的力，记作 $\mathbf{R}$

以斜面上运动的物块为例，物块所受的重力便是主动力，而斜面对物块的支持力便是约束力。

虚功

虚功 (virtual work) 是力与虚位移的点乘：

$$\delta W = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i$$

理想约束

在绪论中曾提到, 约束会增加牛顿方程中未知数的个数, 所以在求解问题前很难计算约束力的虚功. 我们希望: 系统所有约束力的虚功之和为零.

理想约束

满足

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

的约束称为理想约束 (ideal constraint).

对于理想约束系统, 在分析问题时可以忽略约束力带来的影响, 从而简化问题的分析. 幸运的是, 本课程只讨论理想约束系统.

目录

1 概念解释

2 虚功原理

3 利用虚功原理解决静力学问题

4 达朗贝尔原理

5 习题课

理想约束系统的平衡条件

牛顿力学中, 所谓平衡就是所有力的矢量和为零. 具体到某一质点, 其所受主动力与约束力平衡:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = 0$$

将其乘上虚位移, 并求和:

$$\sum_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

虚功原理

理想约束系统的平衡条件是所有主动力的虚功之和为零:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

广义坐标表示

思考 由 $\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$ 能否推出 $\mathbf{F}_i = 0$?

由于约束的存在, $\delta \mathbf{r}_i$ 间并不相互独立, 因此不能推出其系数为零. 但我们可以选择 s 个相互独立的广义坐标, 然后将 $\mathbf{r}_i$ 用广义坐标表示:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$$

对 $\mathbf{r}_i$ 求变分:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \delta t = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha}$$

将其代入虚功原理, 得到:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^s \left(\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0$$

由于 q_α 间已经相互独立, 因此可以要求其前面的系数为 0:

$$Q_\alpha = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0$$

将 Q_α 称为 q_α 对应的**广义力**, 因此虚功原理的另一种等价表述为:

所有广义坐标对应的广义力都为 0.

保守系统的虚功原理

当作用在系统上的主动力为保守力时, 还可以进一步改写. 保守力必然对应一种势能, 且保守力等于势能的负梯度:

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\mathbf{k}\right)$$

代入 Q_α , 得到:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= -\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha}\mathbf{i} + \frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha}\mathbf{j} + \frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\mathbf{k}\right) \\ &= -\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_\alpha}\right) \\ &= -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0 \end{aligned}$$

目录

- 1 概念解释
- 2 虚功原理
- 3 利用虚功原理解决静力学问题
- 4 达朗贝尔原理
- 5 习题课

解题步骤

首先明确一点：

虚功原理解静力学问题, E-L 方程解决动力学问题!

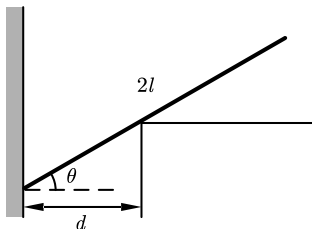
利用虚功原理解静力学问题时, 步骤如下:

- ① 确定系统自由度, 选择合适的广义坐标
- ② 分析系统所受的主动力, 写出虚功的表达式
- ③ 将虚功 δW 用广义坐标的变分 δq_α 来表示, 令其系数为零就得到了平衡条件.

例题讲解

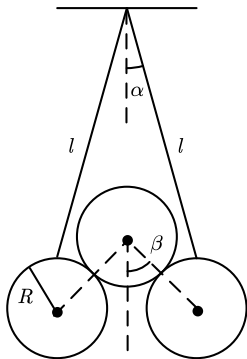
题 1

长为 $2l$ 的匀质杆一端抵在光滑墙上, 杆身斜靠在与墙相距 d 的光滑棱角上, 求杆平衡位置与水平面的夹角 θ .



题 2

相同的两个均匀光滑球悬在结于定点的两根绳子上, 此两球同时又支持着一个等重的均质球, 求 α 角及 β 角之间的关系.



目录

- 1 概念解释
- 2 虚功原理
- 3 利用虚功原理解决静力学问题
- 4 达朗贝尔原理**
- 5 习题课

达朗贝尔原理

达朗贝尔原理整个语境都是牛顿式的(矢量力), 因此出发点自然是**牛顿运动方程**. 对于 N 个质点组成的质点系, 可以对每个质点列牛顿第二定律:

$$\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha = m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N$$

将其改造成“平衡”的形式:

$$\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha - m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha = 0$$

按照牛顿力学的套路, 可以把 $-m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha$ 称为第 α 个质点所受的惯性力. 这样一来, 上式实际上是在说: **质点所受主动力、约束力和惯性力是平衡的**.

乘上虚位移 $\delta \mathbf{r}_\alpha$, 得到:

$$\sum_{\alpha} (\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha - m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha) \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha = \sum_{\alpha} (\mathbf{F}_\alpha - m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha) \cdot \delta \mathbf{r}_\alpha = 0$$

D' Alembert's principle

理想约束系统所受主动力和惯性力产生的总虚功为零.

导出 Euler-Lagrange 方程

仿照虚功原理部分的思路, 将 $\delta \mathbf{r}_\alpha$ 用广义坐标表示:

$$\delta \mathbf{r}_\alpha = \sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \delta q_k \longrightarrow \sum_{\alpha} (\mathbf{F}_\alpha - m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha) \cdot \sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \delta q_k = 0$$

然后交换求和顺序:

$$\begin{aligned} & \sum_k \left[\sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} - \sum_{\alpha} m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \right] \delta q_k \\ &= \sum_k \left[Q_k - \sum_{\alpha} m_\alpha \ddot{\mathbf{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \right] \delta q_k \\ &= 0 \end{aligned}$$

令 δq_k 的系数为零, 得到:

$$Q_k - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_k} = 0$$

两个数学结论

如果要进一步改写上式, 我们需要利用下面两个结论:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_k}$$

证明 $\mathbf{r}_{\alpha}$ 是广义坐标和时间的函数, 因此

$$\dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} \dot{q}_{\beta}$$

而 $\partial \mathbf{r}_\alpha / \partial q_k$ 同样是广义坐标和时间的函数, 因此

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \right) + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \right) \dot{q}_\beta \\ &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta \right) \\ &= \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha}{\partial q_k} \end{aligned}$$

第一个结论证明完毕. 下面证明第二个结论:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta \right) = \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k}$$

利用结论, 改写 $Q_k - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_k} = 0$

$$Q_k - \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \right) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \right) = 0$$

$$Q_k - \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

定义整个体系的动能 $T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}$, 则

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}{\partial q_k} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}{\partial q_k}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_k}$$

得到：

$$Q_k - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_k} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

上式称为**一般形式的 Euler-Lagrange 方程**. 它之所以更一般, 是因为我们并没有规定这是一个保守系统. 如果是保守系统, 广义力可以写成:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

因此

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_k} = 0$$

定义拉氏量 $L = T - V$, 便得到:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, k = 1, 2, \dots, s$$

这便是我们熟悉的 Euler-Lagrange 方程的形式.

目录

- 1 概念解释
- 2 虚功原理
- 3 利用虚功原理解决静力学问题
- 4 达朗贝尔原理
- 5 习题课

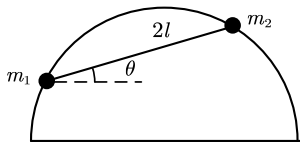
例题 1

半径为 r 的光滑半球形碗, 固定在水平面上. 一均质棒斜靠在碗缘, 一端在碗内, 一端则在碗外, 在碗内的长度为 c , 试证棒的全长为:

$$\frac{4(c^2 - 2r^2)}{c}$$

例题 2

光滑钢丝弯成半径为 R 的半圆并竖直放置, 钢丝上穿着两个质点, 其质量分别为 m_1 和 m_2 , 两质点由长度为 $2l$ 的不可伸长的轻绳连起来, 求平衡时绳与水平面所作角度 θ .



例题 3

光滑圆锥的顶角为 2α , 圆锥的轴是竖直的, 锥尖朝上. 圆锥上套着一个弹性圈, 圈的质量为 m , 自然长度为 l , 劲度系数为 k . 试求弹性圈平衡时与锥尖的距离.