

理论力学

Lecture 5. 小振动

傅林

Central South University
物理学院

2025.2

目录

- 1 小振动拉氏量的建立
- 2 运动微分方程
- 3 方程的求解
- 4 简正坐标
- 5 耦合摆的求解
- 6 习题课

目录

- 1 小振动拉氏量的建立
- 2 运动微分方程
- 3 方程的求解
- 4 简正坐标
- 5 耦合摆的求解
- 6 习题课

小振动的定义

一个物理系统, 如果存在**稳定平衡位形**, 当对稳定平衡位形**偏离很小**, 那么其典型的运动方式就是小振动 (small oscillations).

- 狭义上, 振动指机械振动, 即物体在某一中心位置两侧所做的往复运动.
- 广义上, 振动指描述系统状态的参量 (位移、电压、波函数等) 在其基准值上下交替变化的过程.

振动可按照下面的一些标准进行分类:

- 按自由度: 单自由度 (单摆、弹簧振子)、**多自由度**
- 按振动方程是否显含时间: 自治系统 (不显含时间)、非自治系统 (显含时间)
- 按受力情况: 自由振动、阻尼振动、受迫振动

广义坐标的选择

本讲讨论的是完整、保守系统的多自由度小振动. 设系统的自由度为 s , 因此需要寻找 s 个广义坐标. 但在此处, 我们需要给广义坐标加上一个必要的限制:

对广义坐标的限制

当全部广义坐标为零, 即

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_s = 0$$

正好对应系统的稳定平衡位形, 并将其取为势能零点.

例如在研究平面单摆时, 一般选择绳与竖直方向的夹角为广义坐标, 而不选绳与水平方向的夹角, 因为当其为 0 时并不对应稳定平衡位置.

拉氏量的建立

在 Lec3 提到：对于定常约束系统，动能是广义速度的二次齐次函数：

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \\
 &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \cdot \sum_{\beta=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \left(\sum_i m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \right) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta
 \end{aligned}$$

将上式括号在稳定平衡位形的取值定义为 **质量系数**

$$m_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left. \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right|_{q_\alpha=0} \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \right|_{q_\beta=0}$$

则动能可表示为:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta}$$

质量系数有一个很重要的性质: 其下标顺序可以交换

$$m_{\alpha\beta} = m_{\beta\alpha}$$

因此 $m_{\alpha\beta}$ 组成的矩阵是对称矩阵. 且由于动能必须大于等于零, 因此动能是广义速度的**正定二次型**.

然后分析势能 $V = V(q_1, q_2, \dots, q_s)$. 将其在稳定平衡位形作 Taylor 展开 (保留到第二阶):

$$V = V(0, 0, \dots, 0) + \sum_{\alpha} \left. \frac{\partial V}{\partial q_{\alpha}} \right|_{q_{\alpha}=0} q_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_{\alpha} \partial q_{\beta}} \right|_{q_{\alpha}=q_{\beta}=0} q_{\alpha} q_{\beta}$$

由稳定平衡位形处势能为零和广义力为零, 得到:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right|_{q_\alpha=q_\beta=0} q_\alpha q_\beta$$

定义弹性系数

$$c_{\alpha\beta} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right|_{q_\alpha=q_\beta=0}$$

则势能可表示为:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta$$

弹性系数同样具有对称性: $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$; 稳定平衡要求势能是广义坐标的**正定二次型**.

小振动的拉氏量

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad m_{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left. \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right|_{q_\alpha=0} \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \right|_{q_\beta=0}$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta, \quad c_{\alpha\beta} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right|_{q_\alpha=q_\beta=0}$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta$$

目录

- 1 小振动拉氏量的建立
- 2 运动微分方程**
- 3 方程的求解
- 4 简正坐标
- 5 耦合摆的求解
- 6 习题课

运动微分方程

得到拉氏量 $L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta$, 代入 E-L 方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\gamma} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\gamma} = 0$$

先计算左边:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\gamma} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\gamma} \left(\frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \right) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_\gamma} \dot{q}_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_\gamma} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\beta} m_{\gamma\beta} \dot{q}_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha\gamma} \dot{q}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha} m_{\gamma\alpha} \dot{q}_\alpha \end{aligned}$$

同理

$$\frac{\partial L}{\partial q_\gamma} = - \sum_{\alpha} c_{\gamma\alpha} q_\alpha$$

因此最终得到的运动微分方程为：

$$\sum_{\alpha=1}^s m_{\gamma\alpha} \ddot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^s c_{\gamma\alpha} q_\alpha = 0, \quad \gamma = 1, 2, \dots, s$$

这是一个相当复杂的微分方程组，想要直接求解是不可能的。

目录

- 1 小振动拉氏量的建立
- 2 运动微分方程
- 3 方程的求解
- 4 简正坐标
- 5 耦合摆的求解
- 6 习题课

提出猜测解

我们曾经讲过：物理中的很多东西往往要靠猜，至于对不对则交给实验去验证。

如果自由度 $s = 1$ ，则方程直接简化为：

$$m_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 = 0$$

这是一个很简单的简谐振动方程： $q_1 = A \cos(\omega t + \phi)$ 。于是可以猜测在多自由度问题中，每个广义坐标都作简谐振动。但是这过于简单，与实验现象明显不符。且人们发现，**一般情况下每个广义坐标的运动并不是简谐振动这么简单。**

新思路：可以利用**Fourier 展开**。

假设每个广义坐标的运动可写成很多个不同频率的简谐振动的叠加：

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{s1} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{s2} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \cdots$$

仍需解决的问题有：

- 这个解到底猜的对不对？
- 如果对，那到底要往后加到第几项（有多少个圆频率 ω ）？
- 如何求得这些圆频率 ω ，以及各振幅之间的关系？

验证猜测解

要验证解的正确性, 只需将其代入方程. 但由于解的每一项具有**相同的形式**, 且 E-L 方程是**线性的**, 因此只要某一项满足, 其它项必然也满足. 将第一项代入方程得到:

$$\left[\sum_{\alpha} m_{\gamma\alpha} (-\omega_1^2) A_{\alpha 1} + \sum_{\alpha} c_{\gamma\alpha} A_{\alpha 1} \right] \cos(\omega_1 t + \phi_1) = 0$$

令 $\cos$ 前面的系数为 0:

$$\sum_{\alpha} (c_{\gamma\alpha} - m_{\gamma\alpha} \omega_1^2) A_{\alpha 1} = 0$$

这实际上是关于 $A_{\alpha 1}$ 的**齐次线性方程组**, 可写为矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} c_{11} - m_{11}\omega_1^2 & c_{12} - m_{12}\omega_1^2 & \cdots & c_{1s} - m_{1s}\omega_1^2 \\ c_{21} - m_{21}\omega_1^2 & c_{22} - m_{22}\omega_1^2 & \cdots & c_{2s} - m_{2s}\omega_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} - m_{s1}\omega_1^2 & c_{s2} - m_{s2}\omega_1^2 & \cdots & c_{ss} - m_{ss}\omega_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{s1} \end{pmatrix} = 0$$

存在非零解的条件：**系数行列数等于零**

$$\begin{vmatrix} c_{11} - m_{11}\omega_1^2 & c_{12} - m_{12}\omega_1^2 & \cdots & c_{1s} - m_{1s}\omega_1^2 \\ c_{21} - m_{21}\omega_1^2 & c_{22} - m_{22}\omega_1^2 & \cdots & c_{2s} - m_{2s}\omega_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} - m_{s1}\omega_1^2 & c_{s2} - m_{s2}\omega_1^2 & \cdots & c_{ss} - m_{ss}\omega_1^2 \end{vmatrix} = 0$$

这叫做小振动体系的**久期方程**(secular equation).

*“久期”一词最初来自天体运动的研究，与周期性 (periodic) 对立。

久期方程是关于 ω^2 的 s 次方程, 因此最终可得到 s 个 ω^2 的值; 开根号后取正值, 便得到了 s 个 ω :

$$\omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s \quad (1)$$

这 s 个圆频率, 称为体系的**本征频率**. ω 存在 s 个值这件事告诉我们: 猜测解中应包含 s 项. 有了这些本征频率, 再利用振幅的齐次线性方程组, 可以得到各振幅之间的关系.

最终, 小振动问题的解的形式为:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{s1} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \dots + \begin{pmatrix} A_{1s} \\ A_{2s} \\ \vdots \\ A_{ss} \end{pmatrix} \cos(\omega_s t + \phi_s)$$

目录

- 1 小振动拉氏量的建立
- 2 运动微分方程
- 3 方程的求解
- 4 简正坐标**
- 5 耦合摆的求解
- 6 习题课

引入

尽管我们已经写出了小振动问题的一般形式解,但它并不是那么令人满意.原因是每个广义坐标可能与所有的本征频率都有关,其运动并不像简谐振动那么简单.

问题起源于, $L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} q_{\alpha} q_{\beta}$ 中 $m_{\alpha\beta}$ 和 $c_{\alpha\beta}$ 不是对角化的, 所以将不同的广义坐标混合在了一起, 最终的运动微分方程也是相互耦合的.

normal coordinates

对于小振动问题, 可以适当地选择广义坐标, 使得每个广义坐标都以单一频率振动, 这些广义坐标被称为简正坐标.

矩阵的对角化

核心 将矩阵 $m_{\alpha\beta}$ 和 $c_{\alpha\beta}$ 对角化 (二次型化标准型).

将质量系数和惯性系数的矩阵记为 $\mathbf{m}$ 和 $\mathbf{c}$, 广义坐标组成的列矩阵记为 $\mathbf{q}$, 则拉氏量可写为:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{c} \mathbf{q}$$

作**非退化线性替换**:

$$\mathbf{q} = \mathbf{R} \boldsymbol{\xi}$$

则拉氏量变为:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\xi}} \right)^T \mathbf{m} \left(\mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\xi}} \right) - \frac{1}{2} (\mathbf{R} \boldsymbol{\xi})^T \mathbf{c} (\mathbf{R} \boldsymbol{\xi}) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T (\mathbf{R}^T \mathbf{m} \mathbf{R}) \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T (\mathbf{R}^T \mathbf{c} \mathbf{R}) \boldsymbol{\xi} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \tilde{\mathbf{m}} \dot{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T \tilde{\mathbf{c}} \boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

由线性代数：

两个正定的实对称矩阵，一定存在线性变换，使其同时对角化。

对角化后，对于新的广义坐标 $\{\xi_i\}$ ，拉氏量为

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \tilde{m}_{\alpha\alpha} \dot{\xi}_{\alpha}^2 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \tilde{c}_{\alpha\alpha} \xi_{\alpha}^2$$

代入 E-L 方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_{\gamma}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_{\gamma}} = 0$ ，得到：

$$\tilde{m}_{\gamma\gamma} \ddot{\xi}_{\gamma} + \tilde{c}_{\alpha\alpha} \xi_{\gamma} = 0$$

可以看见，此时运动微分方程**解耦**，且每个广义坐标均作简谐振动（简正坐标）。

更为简单的思路

问题的核心, 变成了求解变换矩阵 $\mathbf{R}$, 但实际上这不是一件简单的事情. 我们还有另外一种更为简单的思路求解简正坐标.

将小振动的一般解写为矩阵乘法的形式:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ \vdots \\ \cos(\omega_s t + \phi_s) \end{pmatrix}$$

记振幅组成的 s 阶方阵为 $\mathbf{A}$, 直接在上式左乘 $\mathbf{A}^{-1}$, 就得到了简正坐标.

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ \vdots \\ \cos(\omega_s t + \phi_s) \end{pmatrix}, \quad \xi_i = \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

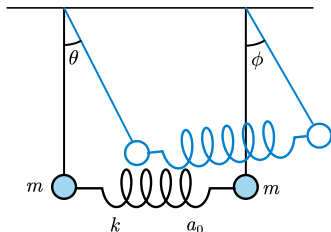
这样一来, $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{q}$ 便是我们寻找的简正坐标.

目录

- 1 小振动拉氏量的建立
- 2 运动微分方程
- 3 方程的求解
- 4 简正坐标
- 5 耦合摆的求解**
- 6 习题课

耦合摆的求解

物理情景 两相同的单摆, 摆长为 l , 摆锤的质量为 m , 用劲度系数为 k 的弹簧相耦合. 弹簧的原长为 a_0 且等于两摆悬挂点之间的距离. 略去阻尼作用, 试求解该体系的运动.



自由度 $s = 2$, 选择 (θ, ϕ) 为广义坐标, 体系动能为:

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2$$

体系的势能包括重力势能和弹性势能. 重力势能为:

$$\begin{aligned} V_{\text{重}} &= mgl(1 - \cos \theta) + mgl(1 - \cos \phi) \\ &\approx \frac{1}{2} mgl\theta^2 + \frac{1}{2} mgl\phi^2 \end{aligned}$$

要计算弹性势能, 可以作近似: 摆动过程中弹簧倾斜幅度不大, 则可用两摆锤水平距离的变化来近似弹簧形变量:

$$\begin{aligned} \Delta x &\approx \Delta x_1 - \Delta x_2 = l \sin \theta - l \sin \phi \approx l(\theta - \phi) \\ V_{\text{弹}} &= \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 = \frac{1}{2} k l^2 (\theta - \phi)^2 \end{aligned}$$

体系的拉氏量

$$\begin{aligned}
 L &= T - V_{\text{重}} - V_{\text{弹}} \\
 &= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} m g l \theta^2 - \frac{1}{2} m g l \phi^2 - \frac{1}{2} k l^2 (\theta - \phi)^2
 \end{aligned}$$

代入 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ 得到:

$$m l^2 \ddot{\theta} + m g l \theta + k l^2 (\theta - \phi) = 0 \quad (1)$$

代入 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$ 得到:

$$m l^2 \ddot{\phi} + m g l \phi + k l^2 (\phi - \theta) = 0 \quad (2)$$

然后写出形式解:

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

将形式解的第一项代入方程 (1) 和 (2), 得到:

$$-m l^2 \omega^2 A_1 + (mgl + k l^2) A_1 - k l^2 A_2 = 0 \quad (3)$$

$$-m l^2 \omega^2 A_2 + (mgl + k l^2) A_2 - k l^2 A_1 = 0 \quad (4)$$

这是关于 A_1 和 A_2 的齐次线性方程组, 令系数行列式为 0:

$$\begin{vmatrix} -m l^2 \omega^2 + mgl + k l^2 & -k l^2 \\ -k l^2 & -m l^2 \omega^2 + mgl + k l^2 \end{vmatrix} = 0$$

这便是耦合摆问题的久期方程.

事实上要求解该方程，只需令行列式的两行成比例即可，而无需展开。

$$-ml^2\omega^2 + mgl + kl^2 = kl^2 \longrightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$-ml^2\omega^2 + mgl + kl^2 = -kl^2 \longrightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$$

然后将解出的 ω 分别代入齐次线性方程组 (3)(4)，得到：

$$A_{11} = A_{21}, A_{12} = -A_{22}$$

最终，问题的解为：

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{11} \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi_1\right) + \begin{pmatrix} A_{12} \\ -A_{12} \end{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}t + \varphi_2\right)$$

要求出简正坐标, 可以将解写为:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{11} & -A_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

令

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

则简正坐标为:

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(\theta + \phi), \xi_2 = \frac{1}{2}(\theta - \phi)$$

此处得到的简正坐标有着明确的物理意义.

- $\xi_1 = \frac{1}{2}(\theta + \phi)$ 描述了质心的运动. 其振动频率 ω_1 中不含有弹簧的影响, 因为弹簧的弹力是体系的内力, 不会影响质心的运动.
- $\xi_2 = \frac{1}{2}(\theta - \phi)$ 描述了两摆间距离的变化, 这会受到弹簧的约束, 因此其振动频率 ω_2 中含有弹簧的影响.

目录

- 1 小振动拉氏量的建立
- 2 运动微分方程
- 3 方程的求解
- 4 简正坐标
- 5 耦合摆的求解
- 6 习题课

例题 1

质量均为 m 的两个质点如图所示与三根弹簧相联结, 弹簧都是水平的. 两侧弹簧的劲度系数为 k , 中间弹簧的劲度系数为 K . 求解两质点的水平方向的运动.

