

理论力学

Lecture 6. 哈密顿力学

傅林

Central South University
物理学院

2025.2

目录

- 1 勒让德变换
- 2 哈密顿正则方程
- 3 相空间
- 4 劳斯函数
- 5 泊松括号
- 6 泊松定理
- 7 习题课

目录

- 1 勒让德变换
- 2 哈密顿正则方程
- 3 相空间
- 4 劳斯函数
- 5 泊松括号
- 6 泊松定理
- 7 习题课

分析力学之大成

分析力学有两大理论体系：

- 拉格朗日力学

- 状态空间：速度相空间 $\{q_\alpha, \dot{q}_\alpha\}$
- 基本量：拉格朗日量 L
- 基本方程：Euler-Lagrange 方程

- 哈密顿力学

- 状态空间：相空间 $\{q_\alpha, p_\alpha\}$
- 基本量：哈密顿量 H
- 基本方程：正则方程、泊松括号、哈密顿-雅可比方程

哈密顿力学是分析力学之大成，分析力学众多基本而美妙的结论都是在哈密顿力学框架下得到的。在纯经典力学的范畴内，哈密顿力学与拉格朗日力学似乎平分秋色。但一旦拓展到其他领域，哈密顿力学的优越性便体现出来了。

例如, 哈密顿力学有三种等价表述: 哈密顿正则方程、泊松括号和哈密顿-雅可比方程; 量子力学的三种形式: 薛定谔方程、正则量子化和路径积分. 其中薛定谔方程对应于哈密顿-雅可比方程, 而正则量子化对应于泊松括号.

此外, 相空间的 Liouville 定理又连接着统计物理系综理论、作用量-角变量又引出了对可积系统的研究. 哈密顿力学就像个“无底洞”, 不断纵深连接其他领域.

将 E-L 方程降阶

我们在前面已经提到：Euler-Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \alpha = 1, 2, \dots, s$$

实质上是 s 个二阶微分方程. 微分方程的阶数越高就越难求解, 因此我们希望将 E-L 方程降为一阶.

问题的关键, 在于拉氏量 L 中含有广义速度 $\dot{q}_\alpha$, 其已经是关于时间的导数, 因此 $\partial L / \partial \dot{q}_\alpha$ 对时间求导后会出现二阶导数. 我们能否将 L 中的 $\dot{q}_\alpha$ 全部换掉, 换成不含时间导数的新变量呢?

在数学上, 这一替换变量的构想可由 Legendre 变换实现.

Legendre 变换

考虑一个一般的 n 元函数 $F = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 求全微分有:

$$dF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$$

Legendre 变换是为了**替换变量**, 即我们想将 F 中的 $\{x_i\}$ 换成一组新变量, 记为 $\{u_i\}$. 定义 $\{u_i\}$ 为:

$$u_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

则 F 的全微分可写为:

$$dF = \sum_{i=1}^n u_i dx_i$$

构造新变量 $\{u_i\}$ 的函数

$$G = G(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n x_i u_i - F$$

对其求全微分得到：

$$dG = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial u_i} du_i = \sum_{i=1}^n x_i du_i + \sum_{i=1}^n u_i dx_i - dF = \sum_{i=1}^n x_i du_i$$

也就是说

$$x_i = \frac{\partial G}{\partial u_i}$$

$$u_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, x_i = \frac{\partial G}{\partial u_i}$$

新变量等于旧函数对旧变量的偏导, 旧变量等于新函数对新变量的偏导.

Legendre 变换还可推广到替换部分变量的情形. 设函数

$$F = F(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$$

现在我们只想替换 x , 而 y 不变. 令 $u_i = \partial F / \partial x_i$, 构造

$$G = G(u_1, \dots, u_n; y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^n x_i u_i - F$$

则可证明:

$$x_i = \frac{\partial G}{\partial u_i}, \quad \frac{\partial F}{\partial y_i} = -\frac{\partial G}{\partial y_i}$$

目录

- 1 勒让德变换
- 2 哈密顿正则方程**
- 3 相空间
- 4 劳斯函数
- 5 泊松括号
- 6 泊松定理
- 7 习题课

对 L 的 Legendre 变换

对拉氏量 $L = L(q_1, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; t)$, 我们想将其中的 $\dot{q}_\alpha$ 全部换掉. 按照 Legendre 变换, 定义新变量

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

这便是广义动量. 然后构造函数:

$$H = H(q_1, \dots, q_s; p_1, \dots, p_s; t) = \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$$

这个函数被称为**哈密顿量**. 变量间的偏导关系为:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

将 p_α 对时间求导:

$$\dot{p}_\alpha = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

Hamilton 正则方程

体系在相空间中的演化由 Hamilton 正则方程描述:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \dots, s$$

它是 $2s$ 个一阶微分方程.

运动积分

广义能量积分

若 H 中不显含时间 t , 即 $\partial H/\partial t = 0$, 则 H 守恒.

证明 将 H 对时间求导得到:

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \dot{p}_{\alpha} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} - \sum_{\alpha} \dot{p}_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \dot{p}_{\alpha} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned}$$

若 $\partial H/\partial t = 0$, 则 $dH/dt = 0$, 即 H 守恒.

广义动量积分

若 H 中不含有某个广义坐标 q_α , 则对应广义动量 $p_\alpha = \partial L / \partial \dot{q}_\alpha$ 守恒.

证明 q_α 是 L 和 H 的公共变量, 由 Legendre 变换:

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

若 $\partial H / \partial q_\alpha = 0$, 则 $\partial L / \partial q_\alpha = 0$, 即广义动量守恒.

从最小作用量原理推导正则方程

最小作用量原理是整个分析力学乃至整个物理学的第一原理, 下面我们将基于它推导 Hamilton 正则方程. 拉氏量可写为:

$$L = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H$$

代入作用量 S , 并取变分得到:

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - H \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} \delta \dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \delta p_{\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \delta q_{\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \delta p_{\alpha} \right) dt \end{aligned}$$

其中,

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} \delta \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \frac{d}{dt} \delta q_{\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} \delta q_{\alpha} \right) - \sum_{\alpha} \dot{p}_{\alpha} \delta q_{\alpha}$$

代入 δS :

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_{\alpha} p_{\alpha} \delta q_{\alpha} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha} \left[\left(\dot{q}_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \right) \delta p_{\alpha} - \left(\dot{p}_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha} \left[\left(\dot{q}_{\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \right) \delta p_{\alpha} - \left(\dot{p}_{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right) \delta q_{\alpha} \right] dt = 0 \end{aligned}$$

因此

$$\dot{q}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}}, \dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}}$$

利用正则方程解决动力学问题

哈密顿力学的解题步骤与拉格朗日力学十分相似.

- 1 分析问题, 确定系统的自由度
- 2 写出系统的哈密顿量 H
- 3 将 H 代入 Hamilton 正则方程, 得到系统的运动微分方程

其中, 重点便是写出哈密顿量. 有两种方法:

- 按照定义式, 先写拉氏量 L , 然后由

$$H = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L$$

求出哈密顿量.

- 在 Lec3 曾提到, 哈密顿量 H 与能量函数 h 本质上是一个东西. 对于定常约束系统, $H = T + V$.

题 1

利用 Hamilton 正则方程, 求解一维谐振子的运动.

解析 自由度 $s = 1$, 广义坐标 $q = x$, 拉氏量为:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

广义动量 $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, 则哈密顿量:

$$H(x, p) = p\dot{x} - L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

代入正则方程, 得到:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx \longrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

题 2

建立质点在二维有心力场势 $V(r)$ 作用下的运动方程。

解析 采用极坐标 (r, θ) 分析问题, 体系拉氏量:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

广义动量 $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$, $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$, 则哈密顿量:

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r)$$

而正则方程中的 $\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r}$ 和 $\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}$ 事实上没有提供任何新的信息。

由剩下的正则方程, 得到:

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

整理有:

$$\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr}, \quad p_\theta = \text{const}$$

目录

- 1 勒让德变换
- 2 哈密顿正则方程
- 3 相空间**
- 4 劳斯函数
- 5 泊松括号
- 6 泊松定理
- 7 习题课

相空间中的物理概念

对于自由度为 s 的体系, 广义坐标与广义动量所张成的 $2s$ 维空间:

$$\{q_1, q_2, \cdots, q_s; p_1, p_2, \cdots, p_s\}$$

称为**相空间**(phase space).

Arnold: "Hamiltonian mechanics is geometry in phase space."

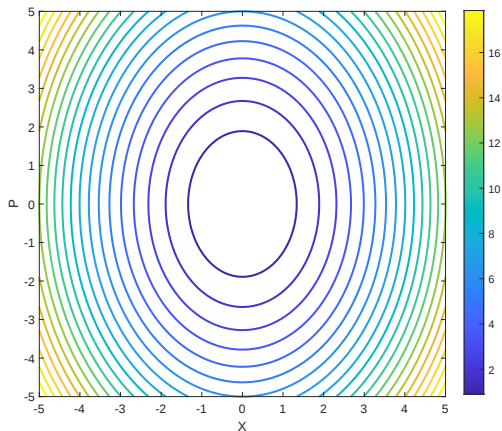
相空间的概念被称为“现代科学中最为强大的发明之一”, 在物理中相空间是一个无处不在的基本概念. 在统计物理中, 相空间也被称为 Γ 空间.

一般来说, 相空间是一个高维空间. 对于自由度 $s = 1$ 的系统, 其相空间 $\{q, p\}$ 为二维平面, 称为**相平面**. 体系某一时刻的状态在相空间中的点称为**相点**; 而当体系随时间演化时, 相点在相空间划出的轨迹称为**相轨迹**.

以一维谐振子为例, 其哈密顿量在前面已经求出:

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

由于 H 中不显含时间, 因此 H 守恒, 其相轨迹为椭圆.



Liouville 定理

在相空间中,系统的状态对应相空间中的一个点,也就是相点.但由于**不确定性**的存在,有时无法精确求得体系的位置和动量,但我们可以确定它所位于的一个区域.接下来我们不再研究相点随时间的演化,而转为研究**相空间中的某一区域随时间的演化**.

Liouville 定理

相空间中的某个区域,随着时间演化,虽然形状可能发生变化,但是**体积不变**.换句话说,可以把相流视为不可压缩的流体.

证明 相空间中的某一点 (q_α, p_α) , 其周围的体元为:

$$d\Gamma = dq_1 \cdots dq_s dp_1 \cdots dp_s$$

经过时间 dt , 该点发生如下变化:

$$q_\alpha \rightarrow q_\alpha + \dot{q}_\alpha dt = q_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dt \equiv \tilde{q}_\alpha$$
$$p_\alpha \rightarrow p_\alpha + \dot{p}_\alpha dt = p_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dt \equiv \tilde{p}_\alpha$$

则新的体元为:

$$d\tilde{\Gamma} = d\tilde{q}_1 \cdots d\tilde{q}_s d\tilde{p}_1 \cdots d\tilde{p}_s = \det(\mathcal{J}) d\Gamma$$

式中 $\det(\mathcal{J})$ 是变换的 **Jacobi 行列式**.

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \partial \tilde{q}_i / \partial q_j & \partial \tilde{q}_i / \partial p_j \\ \partial \tilde{p}_i / \partial q_j & \partial \tilde{p}_i / \partial p_j \end{pmatrix}$$

我们的目标是证明 $d\tilde{\Gamma} = d\Gamma$, 即 $\det(\mathcal{J}) = 1$.

对于单自由度系统 ($s = 1$), Jacobi 行列式为:

$$\det(\mathcal{J}) = \det \begin{pmatrix} 1 + (\partial^2 H / \partial p \partial q) dt & (\partial^2 H / \partial p^2) dt \\ -(\partial^2 H / \partial q^2) dt & 1 - (\partial^2 H / \partial q \partial p) dt \end{pmatrix} = 1 + \mathcal{O}(dt^2)$$

在忽略高阶无穷小时 $\det(\mathcal{J}) = 1$, 且

$$\frac{d}{dt} \det(\mathcal{J}) = 0$$

意味着 Jacobi 行列式的值不随时间而变. 因此 $d\tilde{\Gamma} = d\Gamma$.

推广至一般情形, Jacobi 行列式为:

$$\det(\mathcal{J}) = \det \begin{pmatrix} \delta_{ij} + (\partial^2 H / \partial p_i \partial q_j) dt & (\partial^2 H / \partial p_i \partial p_j) dt \\ -(\partial^2 H / \partial q_i \partial q_j) dt & \delta_{ij} - (\partial^2 H / \partial q_i \partial p_j) dt \end{pmatrix}$$

要计算该行列式, 我们需要利用下面的结论.

一个结论

$$\det(1 + \epsilon M) = 1 + \epsilon \text{Tr}(M) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

其中 M 是任意方阵, ϵ 为无穷小量.

利用该结论, 有:

$$\det(\mathcal{J}) = 1 + \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \right) dt + \mathcal{O}(dt^2) = 1 + \mathcal{O}(dt^2)$$

得到了与单自由度一样的形式, 证明完毕.

目录

- 1 勒让德变换
- 2 哈密顿正则方程
- 3 相空间
- 4 劳斯函数**
- 5 泊松括号
- 6 泊松定理
- 7 习题课

部分 Legendre 变换

从拉氏量 L 到哈密顿量 H 的 Legendre 变换, 将**全部**的广义速度换成了广义动量. 假如我们只将一部分广义速度换成广义动量, 会得到什么呢?

对于一个自由度为 s 的系统, 将广义坐标一分为二:

$$\{q_\alpha\} = \{q_1, q_2, \dots, q_m; q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_s\}$$

现在只将后面 $s - m$ 个广义坐标对应的广义速度换掉, 构造一个新函数:

$$R \equiv \sum_{\alpha=m+1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$$

它被称为**劳斯函数**(Routhian). 劳斯函数介于拉氏量 L 和哈密顿量 H 之间, 像是二者的杂糅.

劳斯函数满足的方程

对 R 求全微分, 得到:

$$\begin{aligned} dR &= \sum_{\alpha=m+1}^s p_{\alpha} d\dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha=m+1}^s \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} - \frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} d\dot{q}_{\alpha} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{\alpha=m+1}^s \dot{q}_{\alpha} dp_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} d\dot{q}_{\alpha} \end{aligned} \quad (1)$$

我们看到, R 是关于 $\{q_1, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m; p_{m+1}, \dots, p_s; t\}$ 的函数. 于是

$$dR = \frac{\partial R}{\partial t} dt + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial R}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_{\alpha}} d\dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha=m+1}^s \frac{\partial R}{\partial p_{\alpha}} dp_{\alpha} \quad (2)$$

比较式 (1) 和 (2), 得到:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, s$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = -p_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, m$$

$$\frac{\partial R}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha, \quad \alpha = m+1, \dots, s$$

- 对于前 m 个广义坐标, 运动方程和 E-L 方程形式一样, 只不过将 L 换成 R :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m$$

- 对于后 $s - m$ 个广义坐标, 运动方程和 Hamilton 正则方程形式一样, 只不过将 H 换成 R :

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial R}{\partial p_\alpha}, \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial R}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = m + 1, \dots, s$$

可以看见, 劳斯方法同时体现了拉格朗日力学和哈密顿力学, 是一种混合的分析力学方法.

劳斯方法的优点

当存在循环坐标时, 运用劳斯函数可以更方便地处理. 在拉格朗日力学中, 如果拉氏量 L 不含有某广义坐标, 则被称为循环坐标. 循环坐标对应的广义动量守恒:

$$p_s \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \text{const}$$

但是, 循环坐标对应的广义速度仍出现在拉氏量中:

$$L = L(t; q_1, q_2, \dots, q_{s-1}; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s)$$

由

$$\frac{\partial H}{\partial q_s} = -\frac{\partial L}{\partial q_s}$$

可知如果 q_s 不出现在拉氏量中, 则其也不会出现在哈密顿量中.

但和拉氏量不同的是, 由于此时 p_s 是常数, 已经失去了变量的地位. 因此哈密顿量既不是 q_s 的函数, 也不再是其广义动量 p_s 的函数.

因此, 劳斯方法的核心在于: 只对拉氏量 L 中的循环坐标部分作 Legendre 变换, 把其广义速度换成常数的广义动量, 这样循环坐标将彻底被消去. 对于非循环坐标, 则采用 E-L 方程求解其运动.

题 3

考虑二维平面上的中心势场问题, 设势能为 $V(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$, 求运动方程.

解析 $s = 2$, 取极坐标 (r, θ) 为广义坐标, 拉氏量:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\alpha}{r^n}$$

其中 θ 为循环坐标, 对应广义动量守恒:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \text{const} = J$$

写出劳斯函数为:

$$R = p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{\alpha}{r^n} = \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{\alpha}{r^n}$$

可以看见, 问题变成了一个 1 维问题, J 在这里成了一个参数. 对于非循环坐标 r , 由 E-L 方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial R}{\partial r} = 0 \longrightarrow m\ddot{r} - \frac{J^2}{mr^3} + \frac{n\alpha}{r^{n+1}} = 0$$

而对于循环坐标 θ , 有:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial R}{\partial J} = \frac{J}{mr^2}$$

目录

- 1 勒让德变换
- 2 哈密顿正则方程
- 3 相空间
- 4 劳斯函数
- 5 泊松括号**
- 6 泊松定理
- 7 习题课

定义

考虑一个相空间中的函数 $f = f(q_1, q_2, \dots, q_s; p_1, p_2, \dots, p_s; t)$, 将其对时间求导:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \dot{p}_{\alpha} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \right)\end{aligned}\quad (3)$$

Poisson bracket

定义力学量 f 和 g 的泊松括号为:

$$[f, g] = \sum_{\alpha=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial q_{\alpha}} \right)$$

性质

泊松括号具有诸多重要的性质，列举如下：

- 反对称性: $[f, g] = -[g, f]$
- $[f, f] = 0$; $[f, c] = 0$ (c 为常数)
- 双线性: $[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g]$, $[f, cg] = c[f, g] = [cf, g]$
- 莱布尼茨规则: $[f_1 f_2, g] = f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g]$
- 时间变化率: $\frac{\partial}{\partial t} [f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right]$
- Jacobi 恒等式: $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$
- 基本泊松括号: $[q_\alpha, q_\beta] = 0$, $[p_\alpha, p_\beta] = 0$, $[q_\alpha, p_\beta] = \delta_{\alpha\beta}$

莱布尼茨规则说明：对于给定函数 g ，可以将泊松括号 $[g, \bullet]$ 或 $[\bullet, g]$ 作为一个整体视为某种求导运算。即：**泊松括号是相空间上的求导运算。**

* 用狄拉克的话说，泊松括号是相空间上唯一的求导方式。

动力学方程

利用泊松括号, 式 (3) 可写为:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]$$

这便是用泊松括号表达的动力学方程, 其等价于 Hamilton 正则方程, 实际上可视为相空间中动力学的一种更加优美的表述.

导出运动积分 任一力学量 $f = f(q_\alpha, p_\alpha, t)$ 为运动积分的充要条件为:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0$$

若 f 不含时, 则 $[f, H] = 0$. 即: 不含时的力学量 f 是运动积分的充要条件是其与哈密顿量 H 对易.

而对于哈密顿量自身有：

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + [H, H] = \frac{\partial H}{\partial t}$$

立马可以得到：若 H 中不显含时间 t ，则 H 守恒。

下面介绍一种特殊的方法——**Taylor 展开法**，来帮助读者熟悉如何利用泊松括号求解力学量随时间的演变，以及熟悉如何处理括号套括号的计算。如果力学量 f 和哈密顿量 H 都不显含时间，则

$$\frac{df}{dt} = [f, H], \frac{d^2f}{dt^2} = \left[\frac{df}{dt}, H \right] = [[f, H], H], \dots$$

为了表述方便，引入符号：

$$D_g f = [g, f]$$

则 f 关于时间的各阶导数为：

$$\frac{df}{dt} = -D_H f, \frac{d^2 f}{dt^2} = D_H^2 f, \dots, \frac{d^n f}{dt^n} = (-1)^n D_H^n f$$

在 $t = 0$ 时刻, 对 f 进行 Taylor 展开：

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dt^2} \right|_{t=0} t^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dt^n} \right|_{t=0} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left. \frac{D_H^n f}{n!} \right|_{t=0} t^n \end{aligned} \quad (4)$$

式 (4) 可视为已知初始条件下, 力学量 f 随时间演变的方程.

例题讲解

题 4

$\mathbf{J}$ 是单个质点的角动量, 求其分量 J_x, J_y, J_z 间的泊松括号.

题 5

通过泊松括号的计算, 建立粒子在重力场中一维运动的方程.

目录

- 1 勒让德变换
- 2 哈密顿正则方程
- 3 相空间
- 4 劳斯函数
- 5 泊松括号
- 6 泊松定理**
- 7 习题课

定理及其证明

Poisson theorem

如果 f 和 g 是系统的两个运动积分, 则两者的泊松括号 $[f, g]$ 也是系统的运动积分, 即:

$$\frac{df}{dt} = 0, \frac{dg}{dt} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt} [f, g] = 0$$

证明 利用动力学方程, 有:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + [g, H] = 0$$

由 Jacobi 恒等式, 有:

$$[H, [f, g]] + [f, [g, H]] + [g, [H, f]] = 0$$

$$\begin{aligned} & [H, [f, g]] + \left[f, -\frac{\partial g}{\partial t} \right] + \left[g, \frac{\partial f}{\partial t} \right] = 0 \\ & \longrightarrow [[f, g], H] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] = 0 \\ & \longrightarrow [[f, g], H] + \frac{\partial}{\partial t} [f, g] = 0 \\ & \longrightarrow \frac{d}{dt} [f, g] = 0 \end{aligned}$$

这就证明了 $[f, g]$ 也是运动积分.

运动积分的封闭性

我们在前面章节已经证明, 有限自由度系统的独立运动积分数目是有限的, 因此利用 Poisson 定理不可能得到无穷多个独立的运动积分. 事实上, 按照两个运动积分做泊松括号产生新运动积分的手续, 最终将得到一个运动积分的集合:

$$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$$

其中任意两个运动积分的泊松括号无法产生新的运动积分, 即必然有:

$$[C_i, C_j] = \sum_k a_{ijk} C_k$$

这里 a_{ijk} 是常数. 换句话说: **运动积分的集合 $\mathcal{C}$ 在泊松括号作用下是封闭的.**

下面以一个例子来说明这一点. 考虑如下的哈密顿量:

$$H = H(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1 q_2 + p_1 p_2$$

对于 $f = p_1^2 + q_2^2$, 有:

$$\begin{aligned}[f, H] &= [p_1^2 + q_2^2, q_1 q_2 + p_1 p_2] \\&= [p_1^2, q_1 q_2] + [p_1^2, p_1 p_2] + [q_2^2, q_1 q_2] + [q_2^2, p_1 p_2] \\&= 2p_1 [p_1, q_1 q_2] + 2q_2 [q_2, p_1 p_2] \\&= 2p_1 q_2 [p_1, q_1] + 2q_2 p_1 [q_2, p_2] \\&= -2p_1 q_2 + 2q_2 p_1 \\&= 0\end{aligned}$$

因此 f 是运动积分. 又由于哈密顿量对指标 $1 \leftrightarrow 2$ 的对称性, 故 $g = p_2^2 + q_1^2$ 也是运动积分.

由 Poisson 定理, 可构建一个新的运动积分:

$$\begin{aligned}h &\equiv [f, g] \\&= [p_1^2 + q_2^2, p_2^2 + q_1^2] \\&= [p_1^2, p_2^2] + [p_1^2, q_1^2] + [q_2^2, p_2^2] + [q_2^2, q_1^2] \\&= 2p_1 [p_1, q_1^2] + 2q_2 [q_2, p_2^2] \\&= 4p_1 q_1 [p_1, q_1] + 4q_2 p_2 [q_2, p_2] \\&= -4q_1 p_1 + 4q_2 p_2\end{aligned}$$

但是可以证明:

$$[f, h] = 8f, \quad [g, h] = -8g$$

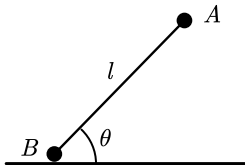
因此 3 个运动积分的集合 $\{f, g, h\}$ 在泊松括号的作用下是封闭的。

目录

- 1 勒让德变换
- 2 哈密顿正则方程
- 3 相空间
- 4 劳斯函数
- 5 泊松括号
- 6 泊松定理
- 7 习题课**

例题 1

质量为 m 的质点 A 和 B 用一无质量的长为 l 的直杆相连, 质点 B 只能沿平面光滑地移动, 试建立系统的运动方程.



例题 2

证明角动量的平方 J^2 与角动量任一分量对易, 即:

$$[J^2, J_x] = [J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0$$